examenbundel.nl

examen bundel

Meer dan alleen oefenexamens

Nu bij je boek
mijn.examenbundel.nl
Online oefenen, video's en meer

2021|2022

havo

Wiskunde A

ThiemeMeulenhoff

examenbundel.nl

examen bundel

Meer dan alleen oefenexamens

2021 | 2022

N.C. Keemink

havo

Wiskunde A

ThiemeMeulenhoff

mijn.examenbundel.nl

Slagen zonder examenstress doe je met Examenbundel, Samengevat, Examenidioom en Zeker Slagen! Alles voor je schoolexamens en je centrale examens in je boeken, maar ook online.

Quickscan

Antwoorden bij de oriëntatietoets

Video's en andere leerbronnen

Oefenexamens

Overzicht van al je examenvakken

En nog veel meer op Mijn Examenbundel!

Ga naar mijn.examenbundel.nl en log in op Mijn Examenbundel. Met deze code krijg je toegang tot heel veel (digitale) extra's die bij je bundel horen:

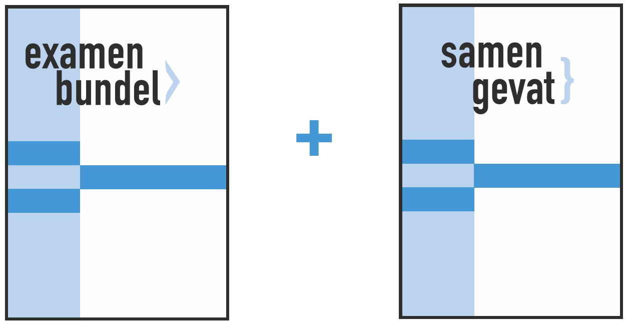
Deze code is uniek en door één persoon te gebruiken. Geldig tot 15 juli 2022.

#ikgazekerslagen

Voorwoord

Met deze **Examenbundel** bereid je je goed voor op het eindexamen en op de schoolexamens. Je oefent met echte examenopgaven. Als je niet weet hoe je een vraag aan moet pakken, raadpleeg dan de bijbehorende hint. In de uitwerkingen staan de antwoorden met een duidelijke uitleg. Zo weet je precies wat je goed en fout hebt gedaan.

Gebruik naast deze **Examenbundel** ook het boek **Samengevat** om te leren voor je examen. Hierin vind je een handige samenvatting van alle examenstof.



Oefenen met echte examens en duidelijke uitwerkingen

Overzichtelijke samenvatting van de examenstof

Wil je weten op welke datum het centraal examen is?
Ga naar examenbundel.nl/examenrooster voor het actuele examenrooster. Of scan de QR-code:

Namens team **Examenbundel** heel veel succes!

Heb je een vraag of opmerking over deze **Examenbundel**? Ga dan naar examenbundel.nl/contact.

Opmerking
De overheid stelt de regels op voor het examen. Bijvoorbeeld wat de examenonderwerpen zijn, welke hulpmiddelen je mag gebruiken en wanneer het examen is. De auteurs en uitgever hebben deze **Examenbundel** met grote zorg samengesteld. Soms veranderen de regels van de overheid echter of worden er nieuwe afspraken gemaakt over wat die regels betekenen. Raadpleeg daarom altijd je docent of onze website www.examenbundel.nl voor actuele informatie die voor jouw examen van belang is.

© ThiemeMeulenhoff

Inhoud

3 **Voorwoord**
7 **Stappenplan: hoe leer je met de Examenbundel?**
13 **Tips: hoe maak je examenopgaven bij wiskunde?**

Oriëntatietoets

17 Opgaven

Deel 1
Oefenen op onderwerp

1 Rekenen (B1) en algebra (B2)
27 Opgaven
34 Hints - uitwerkingen

2 Tabellen (C1) en grafieken (C2)
41 Opgaven
60 Hints - uitwerkingen

3 Veranderingen* (D)
73 Opgaven
80 Hints - uitwerkingen

4 Lineaire verbanden (C4)
85 Opgaven
95 Hints - uitwerkingen

5 Exponentiële verbanden (C5)
107 Opgaven
121 Hints - uitwerkingen

6 Formules met één of meer variabelen (C3)
132 Opgaven
142 Hints - uitwerkingen

7 Statistiek (E1, E2, E3, E4)
151 Opgaven
168 Hints - uitwerkingen

8 Telproblemen* (B3)
180 Opgaven
191 Hints - uitwerkingen

9 Onderzoeksopgaven (A3)
199 Opgaven
205 Hints - uitwerkingen

Deel 2a
Examens met uitwerkingen

Examen 2017-I
213 Opgaven
224 Hints - uitwerkingen

Examen 2017-II
232 Opgaven
241 Hints - uitwerkingen

Examen 2018-I
249 Opgaven
260 Hints - uitwerkingen

Examen 2018-II
268 Opgaven
281 Hints - uitwerkingen

Examen 2019-I
288 Opgaven
301 Hints - uitwerkingen

Examen 2019-II
311 Opgaven
323 Hints - uitwerkingen

Deel 2b
Examen zonder uitwerkingen

Examen 2021-I
333 Opgaven

Bijlagen

Cijferbepaling
Onderwerpregister
Examenwerkwoorden
Formuleblad

* Deze onderwerpen worden niet in het centraal examen gevraagd.

© ThiemeMeulenhoff

Stappenplan: hoe leer je met de Examenbundel?

Natuurlijk kun je de **Examenbundel** van voor naar achter doorwerken of er kriskras wat onderdelen uithalen om mee te oefenen, maar je kunt het ook systematischer aanpakken. Als je oefenen met de **Examenbundel** combineert met leren uit **Samengevat**, bereid je je optimaal voor op je examen.

Op de volgende pagina's vind je drie routes die laten zien hoe je kunt leren met de **Examenbundel**. Kies de route die past bij jouw manier van leren:

- Route 1: Ga je graag meteen aan de slag? Start met **oefenen per onderwerp**.
- Route 2: Wil je eerst weten waar je staat? Start met **de oriëntatietoets**.
- Route 3: Leer je liever eerst de theorie? Start met **leren per onderwerp**.

Wil je weten wat je leerstijl is?

Kies de route die bij jouw manier van leren past!

Lees ook de tips! Voorkom verrassingen tijdens je examen.

#ikgazekerslagen

Route 1

Ga je graag meteen aan de slag? Start met oefenen per onderwerp.

januari & februari

- Maak per week opgaven van een hoofdstuk in deel 1 van de Examenbundel.
- Kijk de opgaven na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Meer dan de helft goed. → Maak de oriëntatietoets.
  - De helft of minder goed.
    - Neem het bijbehorende hoofdstuk in Samengevat door.
    - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.
    - Kijk die opgaven na.
      - Meer dan de helft goed. → Maak de oriëntatietoets.
      - De helft of minder goed.
        - Maak de opgaven van dat hoofdstuk uit deel 1 die je nog niet gemaakt had. Gebruik de hints. → Maak de oriëntatietoets.

maart

- Maak de oriëntatietoets.
- Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.
  - Voldoende.
  - Onvoldoende.
- Bestudeer Samengevat over de onderwerpen die minder goed gingen.
- Oefen opgaven uit deel 1 van de Examenbundel en via het onderwerpregister uit de verschillende examens over het betreffende onderwerp. Gebruik de hints!

april

- Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.
- Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Tevreden met het resultaat. → Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.
  - Niet tevreden met het resultaat.
    - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
    - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.
- Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

Route 2

Wil je eerst weten waar je staat? Start met de oriëntatietoets.

januari

- Maak de oriëntatietoets in de Examenbundel.
- Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.
  - Voldoende.
  - Onvoldoende.
    - Kijk welke onderwerpen uit deel 1 van de Examenbundel nog niet goed gingen.

februari

- Bestudeer elk hoofdstuk in Samengevat.

maart

- Maak opgaven per onderwerp uit deel 1 van de Examenbundel.
- Kijk de opgaven na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Meer dan de helft goed.
  - De helft of minder goed.
    - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.
    - Kijk die opgaven na.
      - Meer dan de helft goed.
      - De helft of minder goed.
        - Maak de opgaven van dat hoofdstuk uit deel 1 die je nog niet gemaakt had. Gebruik de hints.

april

- Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.

april

- Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.
  - Tevreden met het resultaat.
  - Niet tevreden met het resultaat.
    - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
    - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.
- Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

Route 3

Leer je liever eerst de theorie? Start met leren per onderwerp.

#

januari & februari

Bestudeer per week een hoofdstuk uit Samengevat.

maart

Maak de oriëntatietoets van de Examenbundel.

Bereken je score met de uitwerkingen op mijn.examenbundel.nl.

- Voldoende.
- Onvoldoende.
  - Kijk welke onderwerpen uit deel 1 van de Examenbundel nog niet goed gingen.
  - Maak de opgaven uit deel 1 over die onderwerpen.
  - Kijk die opgaven na.
    - Meer dan de helft goed.
    - De helft of minder goed.
      - Oefen met het onderwerpregister achter in de Examenbundel meer opgaven over dit onderwerp uit de verschillende examens.

april

Maak een heel examen uit deel 2a van de Examenbundel.

Kijk het examen na met de bijbehorende uitwerkingen.

- Tevreden met het resultaat.
- Niet tevreden met het resultaat.
  - Kijk met behulp van het onderwerpregister welke onderdelen nog niet goed gaan en waar voor jouw gevoel wel winst is te behalen. Je hoeft niet alles goed te doen!
  - Bestudeer Samengevat en maak via het onderwerpregister van de Examenbundel een aantal opgaven over dat onderwerp uit deel 1 en 2a tot je tevreden bent met het resultaat.

Blijf oefenen met deel 2a zodat je met vertrouwen het examen in gaat.

#geenexamenstress

© ThiemeMeulenhoff

Tips: hoe maak je examenopgaven bij wiskunde?

Bij het op de juiste manier oplossen van een probleem doorloop je in het algemeen drie stappen: de voorbereiding, de uitvoering en een controle.

Voorbereiding

- Kijk eerst vluchtig alle opgaven door en begin met de opgaven die je vertrouwd voorkomen.
- Ga na hoeveel tijd beschikbaar is per opgave.
- Lees de tekst van de gekozen opgave rustig en nauwkeurig. Onderstreep of markeer hierbij aanwijzingen, begrippen, formules, getallen e.d. die van belang kunnen zijn. Deze informatie is dan bij het beantwoorden van de vragen snel terug te vinden.
- Lees elke vraag nauwkeurig en ga na welke informatie je nodig denkt te hebben om de vraag te kunnen beantwoorden.
- Als in een vraag staat ‘los op, benader of bereken’ dan mag de grafische rekenmachine gebruikt worden om het antwoord te vinden.
- Bepaal welke tussenstappen je bij de beantwoording van de vraag zult moeten maken. Deze worden bepaald door het ‘gat’ dat er zit tussen de gegevens en het gevraagde. Je kunt daarbij zowel van de gegevens als van het gevraagde uitgaan.
- Begin pas aan de uitvoering, wanneer je de aanpak van het vraagstuk overziet.

Uitvoering

- Reserveer op je papier voor elke opgave voldoende ruimte. Je werk wordt daardoor overzichtelijker en je kunt je antwoord makkelijker aanvullen.
- Schrijf alle tussenstappen overzichtelijk op, zodat zichtbaar wordt hoe je tot je antwoord bent gekomen.
- Indien om uitleg wordt gevraagd, mag die niet ontbreken.
- Schrijf bij twijfel altijd iets op (behalve als je zelf al kunt beoordelen dat je antwoord nergens op slaat).

Controle

- Lees de vraag nog eens over. Is hij volledig beantwoord?
- Vind je het gevonden antwoord zinnig (klopt bv. de orde van grootte)? Zo niet, probeer je denk- of rekenfout op te sporen of maak daarover tenminste een opmerking.
- Is de juiste eenheid vermeld?
- Is de afronding van een verkregen waarde in overeenstemming met de vraagstelling? Let op het juiste aantal cijfers achter de komma.

© ThiemeMeulenhoff

Hoe zou je het nu al doen op een examen? De oriëntatietoets geeft je een eerste indruk. De antwoorden vind je op mijn.examenbundel.nl.

Oriëntatietoets

Oriëntatietoets

Koopsom

Als je een huis koopt, moet je meer betalen dan alleen de koopsom. Je moet bijvoorbeeld belasting betalen en de kosten van de notaris. Deze bijkomende kosten zijn voor een nieuwbouwhuis ongeveer 6% van de koopsom en voor een bestaande woning ongeveer 12%.
Iemand heeft een bestaande woning gekocht. De koopsom en de bijkomende kosten hebben haar in totaal 300 000 euro gekost.

3p **1** Bereken de koopsom en rond af op hele euro's.

Zorginfecties

Patiënten die voor een behandeling enige tijd in een ziekenhuis worden opgenomen, lopen tijdens dit verblijf het risico een infectie te krijgen. Zo'n infectie wordt een zorginfectie genoemd. Een deel van de zorginfecties ontstaat na een operatie.

In de periode 2007 tot en met 2012 is een steekproef gehouden onder een deel van de Nederlandse ziekenhuizen. Enkele resultaten hiervan zijn in de tabel te zien.

tabel

	aantal
patiënten	95 299
patiënten die een zorginfectie hebben opgelopen	4 694
geopereerde patiënten	32 664
geopereerde patiënten die een zorginfectie hebben opgelopen	1 286

We nemen aan dat de patiënten in deze ziekenhuizen representatief zijn voor alle patiënten die in een Nederlands ziekenhuis worden opgenomen.
Dan kunnen we op basis van de gegevens in de tabel schatten hoeveel procent van alle in Nederland geopereerde patiënten in de genoemde periode een zorginfectie opliep.

4p **2** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval van dit percentage. Rond de getallen in je eindantwoord af op één decimaal.

© ThiemeMeulenhoff

Het is mogelijk om op basis van de tabel een kruistabel te maken. Hieronder is een begin gemaakt met deze kruistabel. Met behulp van de ingevulde kruistabel kun je bepalen of het verschil in het krijgen van een zorginfectie tussen geopereerde en niet-geopereerde patiënten groot, middelmatig of gering is.

6p **3** Vul de kruistabel in en bepaal daarmee, en met behulp van een vuistregel op het formuleblad, of het genoemde verschil groot, middelmatig of gering is.

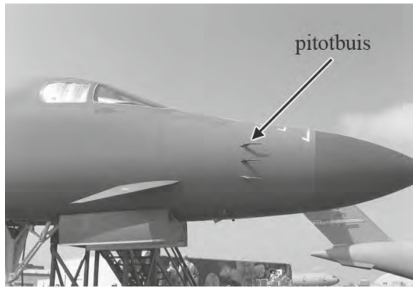
		geopereerd		
		wel	niet	**totaal**
zorginfectie opgelopen	wel			
	niet			
	totaal			

In de kruistabel worden variabelen gebruikt.

4p **4** Noem de variabelen uit de kruistabel en geef aan of deze variabelen kwalitatief of kwantitatief zijn. Licht je antwoord toe.

© ThiemeMeulenhoff

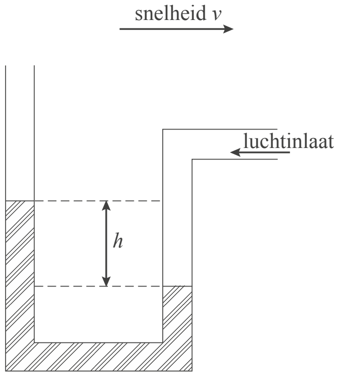
Pitotbuis



Voor de piloot van een vliegtuig is de ‘air speed’ heel belangrijk. Dit is de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de omringende lucht. Deze snelheid wordt gemeten met pitotbuizen: kleine buisvormige uitsteeksels aan de romp of vleugel van een vliegtuig. Zie de foto.

Een eenvoudige versie van een pitotbuis is een gebogen buis met een vloeistof erin, zie figuur 1. De werking is als volgt.
Het vliegtuig vliegt naar rechts, zodat aan de rechterkant lucht de buis instroomt en daar de vloeistof wegdrukt, zie figuur 1. De vloeistof in de linkerbuis komt dan hoger te staan. De hoogte van de vloeistof in de linkerbuis ten opzichte van de rechterbuis kan worden gemeten. Een hogere snelheid geeft een grotere hoogte.

figuur 1



Je kunt met zo’n buis ook de snelheid van je auto bepalen op een windstille dag. Het enige wat je daarvoor nodig hebt, is een met water gevulde doorzichtige plastic buis die je tot een pitotbuis vormt. Het uiteinde voor de luchtinlaat wordt buiten de auto in de rijrichting geplaatst.

Een natuurkundedocent heeft op deze manier de hoogte h in cm gemeten bij verschillende snelheden v in km per uur. De resultaten staan in figuur 2.

figuur 2

snelheid v (in km/uur	0	20	40	60	80	100
hoogte h (in cm)	0	0,2	0,8	1,7	3,0	4,7

De natuurkundedocent weet dat er een kwadratisch verband tussen h en v bestaat. Dit verband is van de volgende vorm

$h = a \cdot v^2$

Hierin is h de hoogte in cm en v de snelheid van de auto in km per uur.

3p **5** Bereken met behulp van figuur 2 de waarde van a.

© ThiemeMeulenhoff

Het verband tussen h en v is natuurlijk al langer bekend. Volgens natuurkundige wetten geldt in dit geval

$v^2 = 2116 \cdot h$

In de rest van deze opgave gaan we uit van dit verband.

De natuurkundedocent heeft nog een andere auto, daarvan is de snelheidsmeter onbetrouwbaar. Hij maakt met deze auto een rit waarbij hij met zijn pitotbuis een hoogte meet van 7,2 cm. Met dit gegeven en het natuurkundige verband kan hij zijn werkelijke snelheid berekenen.
De (onbetrouwbare) snelheidsmeter geeft een snelheid van 110 km per uur aan.

4p **6** Bereken hoeveel procent de snelheid op zijn snelheidsmeter afwijkt van de snelheid volgens het natuurkundige verband.

Hieronder staan vijf verbanden (**a** t/m **e**) tussen h en v.

a $h = \frac{v^2}{2116}$	**b** $v = 2116 \cdot \sqrt{h}$	**c** $\frac{v^2}{h} = 2116$
d $h \cdot v^2 = 2116$	**e** $v = 46 \cdot \sqrt{h}$	

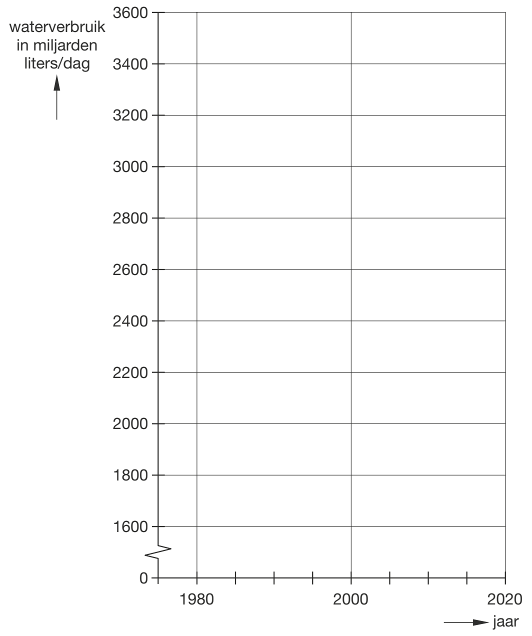
5p **7** Geef bij al deze verbanden aan of het verband $v^2 = 2116 \cdot h$ eruit kan worden afgeleid. Als dit mogelijk is, laat dan de afleiding zien.

Waterverbruik in de VS

Overal op aarde is de behoefte aan schoon water groot. Niet alleen voor huishoudelijk gebruik (o.a. drinkwater), maar vooral voor niet-huishoudelijk gebruik (landbouw en industrie) is heel veel water nodig.

In 1975 bedroeg het totale waterverbruik in de Verenigde Staten ongeveer 1540 miljard liter per dag. In 1980 was dat 1680 miljard liter per dag, een toename van 9% in een periode van 5 jaar.
Men vraagt zich af hoe het waterverbruik zich in de volgende eeuw zal ontwikkelen. Een onderzoeksbureau verwachtte in 1980 dat het waterverbruik exponentieel zou blijven stijgen en dat de toename elke vijf jaar minimaal 7% en maximaal 10% zou zijn.

figuur 3



5p **8** Arceer in figuur 3 het gebied waarbinnen het totale waterverbruik per dag volgens deze veronderstelling in de periode van 1980 tot 2020 zal liggen.
Licht je werkwijze toe.

De onderzoekers verwachten dat er niet onbeperkt aan die toenemende waterbehoefte kan worden voldaan. Zij verwachten dat er maximaal 5000 miljard liter per dag beschikbaar zal zijn.

3p **9** Tot welk jaar zal er, volgens de veronderstellingen van de onderzoekers, zeker nog voldoende water beschikbaar zijn? Licht je antwoord toe.

Start to Run

Als je begint met hardlopen, moet je in het begin niet te snel of te lang willen lopen. Het is veel beter om rustig aan te beginnen en eerst een goede conditie op te bouwen. Een trainingsprogramma dat veel gebruikt wordt, heet Start to Run. Daarbij moet je tien weken lang drie keer per week hardlopen, waarbij je gaandeweg steeds langere periodes aan één stuk hardloopt. In de figuur zie je hoe het trainingsprogramma eruitziet.

figuur

Week-nummer	Trainings-dag	Programma	Totaal aantal minuten
1	1	+0+0++00++00+++000	18
	2	+0+0++00+++000+++000	20
	3	+0++00++00+++000+++000	22
2	1	+0++00++00+++000+++000	22
	2	++00+++000+++000+++000	22
	3	+0++00+++000+++000+++000	24
3 en 4	1	+0++00+++000+++000+++000	24
	2	++00++0++0++0++0++0++0++0	25
	3	+0++00++++000++++000+++++0	26
5 en 6	1	++00+++00+++++000+++++000+++++00	32
	2	++0+++00++++++00++++++00+++++++00	33
	3	++00++++00+++++00++++++00+++++++00	34
7	1	+++++0++++++00+++++++00++++++++0	32
	2	++++++++0++++++++00++++++++0++++++++0	37
	3	++++++++++00++++++++++00++++++++++++0	37
8 en 9	1	+++++++++++++++00+++++++++++++++00	34
	2	++++++++++0++++++++++++0++++++++++++0	37
	3	++++++++++0++++++++++++++++++++0	32
10	1	30 minuten hardlopen met 1 of 2 minuten wandelen naar keuze	31 of 32
	2	32 minuten hardlopen met 1 of 2 minuten wandelen naar keuze	33 of 34
	3	30 minuten hardlopen zonder wandelen	30

+ betekent: 1 minuut hardlopen
0 betekent: 1 minuut wandelen

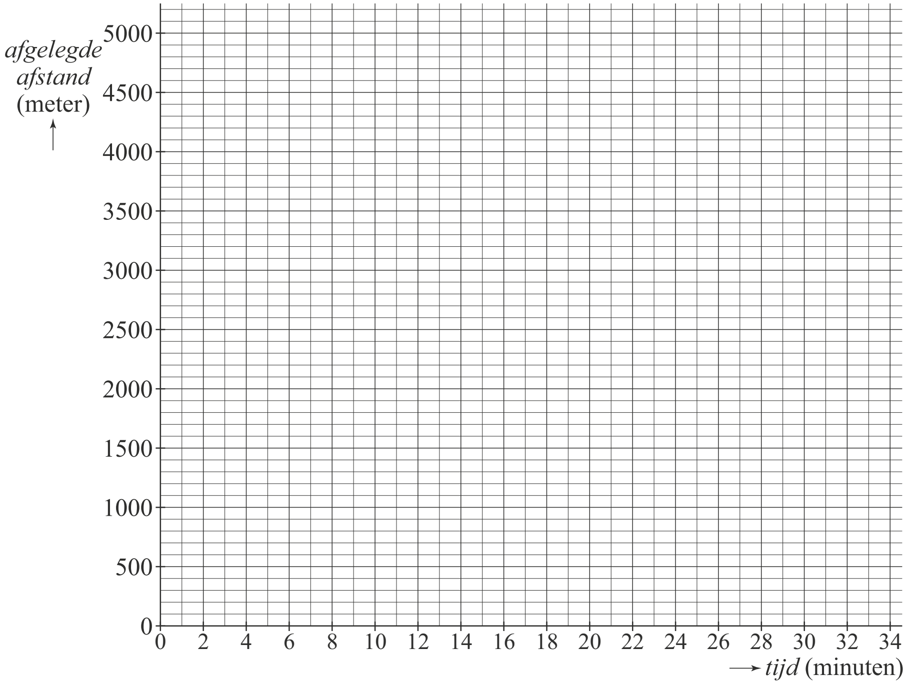
 © ThiemeMeulenhoff

© ThiemeMeulenhoff

In het schema kun je aflezen dat je op trainingsdag 1 van week 1 eerst tweemaal om en om één minuut moet hardlopen en één minuut moet wandelen, daarna tweemaal twee minuten moet hardlopen en twee minuten moet wandelen en ten slotte drie minuten moet hardlopen en drie minuten moet wandelen. Daarmee ben je 18 minuten bezig.
Het programma is zo opgesteld dat je na tien weken een halfuur zonder onderbreking kunt hardlopen. Het gaat bij Start to Run niet om de snelheid waarmee je hardloopt, dat komt later. Er wordt juist geadviseerd om gedurende deze tien weken de hardloopsnelheid constant te houden.

Mevrouw Harmsen traint volgens het programma en is inmiddels in week 9.
Haar hardloopsnelheid is steeds 140 meter per minuut en haar wandelsnelheid is steeds 50 meter per minuut.

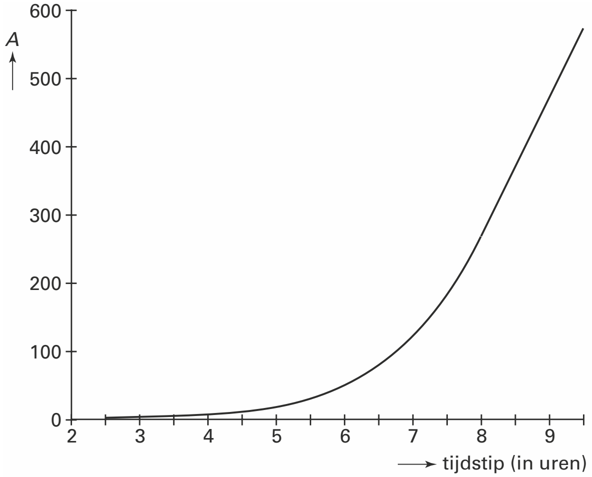
4p **10** Teken in de figuur hieronder de grafiek van de afgelegde afstand van mevrouw Harmsen tijdens trainingsdag 1 van week 9.



© ThiemeMeulenhoff

Kalm aan en rap een beetje

De voorverkoop voor de voorstellingen van ‘Kalm aan en rap een beetje’ van Herman Finkers begon om tien uur ’s morgens. De eerste wachtenden stonden al om half drie ’s nachts bij de deur van de schouwburg. Ze gebruikten een viltstift om volgnummers op hun handen te schrijven. Navraag in de rij leerde dat het meisje met nummer 25 al vanaf half zes in de rij stond en de man met nummer 271 vanaf acht uur. De vrouw die nummer 455 had, kwam om negen uur. De grafiek hieronder geeft een goed beeld van het aantal wachtenden A.



In de grafiek is te zien dat de groei van het aantal wachtenden vanaf acht uur vrijwel lineair verliep. Zoals eerder vermeld, waren er om acht uur 271 wachtenden en om negen uur 455.

Veronderstel dat de groei van het aantal wachtenden na acht uur lineair bleef.

4p **11** Bereken, uitgaande van deze lineaire groei, het aantal wachtenden om 9.45 uur.

Reclamefolders

Hij is er al een poosje en blijft ook nog wel even: de ongeadresseerde reclamefolder. Het onderzoek ‘Thuis binnen Bereik’, dat in 2009 gehouden is, geeft aan dat reclamefolders behoorlijk effectief zijn. Veel mensen die ze hebben bekeken, gaan tot actie over: men koopt een getoond product óf gaat een winkel bezoeken óf kijkt op een website. Volgens het onderzoek zorgen deze ongeadresseerde reclamefolders er voor dat 15% van de totale Nederlandse bevolking tot actie overgaat.

Het onderzoek is gebaseerd op een aantal gegevens en aannames.

© ThiemeMeulenhoff

Het Centraal Bureau voor de Statistiek meldt voor 2009:
- Er zijn 7,313 miljoen huishoudens, waarvan 2,618 miljoen eenpersoons-huishoudens;
- Een meerpersoonshuishouden telt gemiddeld 2,3 personen ouder dan 16 jaar;
- Nederland heeft 16,53 miljoen inwoners.

De volgende aannames zijn gedaan:
- $\frac{1}{6}$ deel van de huishoudens heeft een ‘ja/nee-sticker’ en ontvangt dus geen folders;
- In verhouding zijn er evenveel eenpersoons- als meerpersoonshuishoudens met een sticker;
- In huishoudens waar de folders wel ontvangen worden, bekijkt driekwart van alle personen ouder dan 16 jaar deze folders;
- 27% van de personen die de folders bekijken, gaat tot actie over;
- Alle eenpersoonshuishoudens worden gevoerd door een persoon ouder dan 16 jaar.

Het genoemde percentage van 15% dat tot actie overgaat, lijkt erg hoog. Op basis van bovenstaande gegevens en aannames kun je onderzoeken of dit percentage juist is.

7p **12** Onderzoek of dit percentage van 15% juist is.

 © ThiemeMeulenhoff

Examenopgaven per onderwerp met hints om je op weg te helpen en uitleg bij de antwoorden. Ook handig bij de voorbereiding op je schoolexamens!

Deel 1 Oefenen op onderwerp

1 Rekenen en algebra

Rekenen

1 Bereken zonder rekenmachine de uitkomsten van de volgende opgaven:

a $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7}$

b $\frac{3}{4} + \frac{5}{7}$

c $6 \cdot \frac{5}{7}$

d $\frac{2}{3} \times 6 \times \frac{1}{5}$

e $\dfrac{3}{\left(\frac{2}{3}\right)}$

f $2\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3}$

g $\sqrt{\frac{9}{16}}$

h $\sqrt{1\frac{11}{25}}$

i $4 \times (21 : 7 - 2) + 2^2 \times 3 : 6 \times 5 - 9$

j $10 \times 2^3 \times \sqrt{9} : 5 - 2 \times (3 + 1) =$

Haakjes

2 Herschrijf onderstaande formules zonder haakjes en vereenvoudig ze zover mogelijk.

a $3 + 4q - 5(3 - 2q) =$

b $(3 + 4q)(3 - 2q) =$

c $(q^2 + 2q)(1 - 2q) + 5q - 8 =$

d $\dfrac{9k^4}{k^2} + 5k(k + 2) =$

e $\dfrac{k^2}{\left(\frac{3}{k}\right)} =$

f $\dfrac{\left(\frac{k^3}{6}\right)}{2k} =$

g $(q^2)^3 \times 5q =$

Herschrijf onderstaande formules.

h $P = 100 \times \left(1 - 0{,}61^t\right) - 50 \times t \times 0{,}61^t$

Deze formule is te herleiden tot de vorm

$P = a + (b \times t + c) \times 0{,}61^t$

Bereken de waarde van a, b en c

© ThiemeMeulenhoff

i Gegeven een formule: $\frac{f \times d}{15} = 0{,}3$. Druk *f* uit in *d*

j Gegeven een formule: $R = 100 \times \sqrt{\frac{A}{4{,}9}}$
Herleid deze formule tot $A = cR^2$

Benzineverbruik

John wil een nieuwe auto kopen. Hij vergelijkt bij een consumentenorganisatie verschillende auto's waar hij interesse in heeft en kiest een auto uit.
De consumentenorganisatie heeft een ecotest uitgevoerd. In een ecotest worden onder andere het verbruik en de CO_2-uitstoot van een auto gemeten. Omdat de ecotest onder andere omstandigheden wordt uitgevoerd dan de test van de fabrikant, wijken de gevonden getallen meestal af.
Een deel van de gegevens van de test van de fabrikant en van de ecotest staat in tabel 1.

tabel 1

testgegevens	test van de fabrikant	uitkomst van ecotest
verbruik (liter per 100 km)	4,3	5,0
CO_2-uitstoot (gram per km)	134	155

John is erg geïnteresseerd in het verbruik van de auto, want hij rijdt gemiddeld 25 000 kilometer per jaar.

3 Hoeveel liter benzine moet John per jaar volgens de ecotest meer of minder tanken dan volgens de fabrikant?

Olie

Er wordt door mensen veel olie verbruikt. Gelukkig wordt er nog regelmatig nieuwe olie gevonden, maar ooit zal de olie opraken.
Onder de **reserves** verstaan we de hoeveelheid olie die naar schatting nog uit de grond gehaald kan worden.
Onder de **consumptie** verstaan we de hoeveelheid olie die echt gebruikt wordt.
Hoeveelheden olie worden uitgedrukt in vaten. Eén vat bevat 159 liter olie.

In 2003 was de olieconsumptie in de Verenigde Staten 20 071 000 vaten per dag.
In 2003 had de Verenigde Staten ongeveer 293 miljoen inwoners.
4 Bereken de olieconsumptie in de Verenigde Staten in 2003 in liter per inwoner per dag.

Aan het eind van 2003 waren de reserves in de hele wereld 1147,7 miljard vaten.
Als de wereldconsumptie per dag steeds gelijk zou blijven aan die van 2003, dan zouden deze reserves 41 jaar later helemaal verbruikt zijn: er is dan geen olie meer.
5 Bereken hoeveel vaten olie er per dag in de wereld geconsumeerd werden in 2003. Geef je antwoord in miljoenen.

Gezond gewicht

Wat voor iemand een gezond gewicht is, hangt onder andere af van de lichaamslengte. In de literatuur vind je verschillende methoden om het gewicht te bepalen aan de hand van de lichaamslengte.
Een van die methoden levert als ideaal gewicht voor vrouwen:

formule 1: $G = 100 \cdot L - 110$

Naast verschillende formules die een verband aangeven tussen het (ideale) gewicht en de lengte, maakt men ook vaak gebruik van de Body Mass Index, de BMI.
De formule van de BMI ziet er als volgt uit:

formule 2: $BMI = \frac{1}{L^2} \cdot G$

Hierin is *G* het gewicht in kilogrammen en *L* de lengte in meters.
6 Bereken de *BMI* van een vrouw die 176 cm lang is en het ideale gewicht heeft volgens formule 1.

Wanneer een vrouw een ideaal gewicht heeft dat voldoet aan formule 1, kunnen we de formule voor de *BMI* zo schrijven dat deze alleen nog afhangt van de lengte *L*.
7 Schrijf op hoe de formule voor de *BMI* er dan uit ziet. Schrijf het antwoord als één breuk.

Een andere methode, de zogenoemde Hamwi-methode, geeft aan dat het ideale gewicht voor vrouwen berekend kan worden met:

formule 3: $G = 45{,}4 + 0{,}89 \cdot (L - 152{,}4)$

In deze formule is *L* de lengte in centimeters en *G* het gewicht in kilogrammen.
Formule 1 en 3 leveren, bij een gegeven lengte, meestal verschillende uitkomsten op.
8 Bereken welke formule de grootste uitkomst oplevert voor een vrouw die 172 cm lang is.

Er is precies één waarde van *L* waarbij de twee formules dezelfde uitkomst opleveren.
9 Bereken algebraïsch deze waarde van *L* in centimeter nauwkeurig.

Autoverhuurbedrijf

Een autoverhuurbedrijf berekent de prijs voor een dag autoverhuur met de formule;

$P_1 = 40 + 0{,}56\ k$.

Een tweede bedrijf berekent de huurprijs volgens:

$P_2 = 64 + 0{,}40\ k$.

P_1 en P_2 is de prijs in euro's en *k* is het aantal gereden kilometers.
10 Bereken bij welke afstand de bedrijven even duur zijn.

11 Marc weet precies hoeveel km hij moet rijden.
Hij betaalt bij het eerste bedrijf 10 euro meer.
Hoeveel km moet Marc rijden?

Opbrengst en winst

Een fabrikant verkoopt vazen voor € 5,- per stuk. Bij het maken van de vazen berekent hij zijn kosten per dag volgens $K = 1600 + 3v$. Hierin is K de kosten in euro's en v het aantal geproduceerde vazen.

12 Geef de formule van de opbrengst O in euro's, afhankelijk van het aantal verkochte vazen.

13 Bereken vanaf welk aantal verkochte vazen de fabrikant winst maakt.

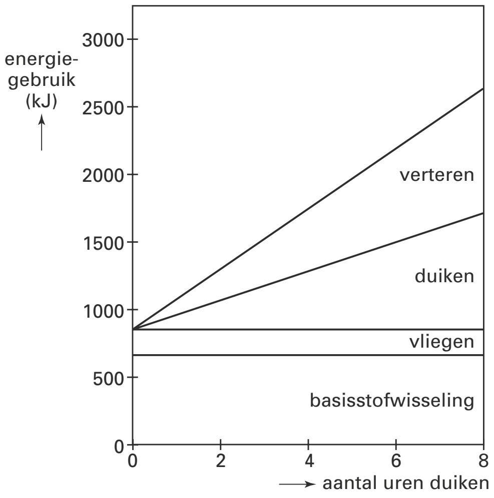
Duikeend

Op het IJsselmeer overwinteren grote groepen duikeenden. Ze leven van mosselen die daar veel op de bodem voorkomen.
Duikeenden slikken hun mosselen met schelp en al in. Bij elke duik slikt de eend behalve een mossel dus ook onverteerbaar schelpmateriaal en water in, alles bij elkaar ongeveer 6 gram. Zo'n hap bevat maar 5% mosselvlees. De dagelijkse behoefte van een duikeend is ongeveer 120 gram mosselvlees.

14 Hoe vaak moet een eend duiken om zijn dagelijkse portie mosselvlees binnen te krijgen? Licht je antwoord toe.

Het gedrag van duikeenden is volledig gericht op het verzamelen van voedsel.
Alle voedingsstoffen en energie die ze nodig hebben, halen ze uit de mosselen.
De energiehuishouding van een duikeend is ingewikkeld. Aan de ene kant moeten de mosselen de benodigde energie leveren, aan de andere kant kost het opduiken en verteren van mosselen energie.
Ook als een eend op een dag niet naar mosselen zou duiken, gebruikt hij een vaste hoeveelheid energie voor zijn basisstofwisseling en het vliegen, samen ongeveer 850 kJ.
In figuur 1 is te zien dat de totale hoeveelheid energie die een duikeend gebruikt, afhankelijk is van het aantal uren dat hij naar mosselen duikt.

figuur 1



© ThiemeMeulenhoff

Als een eend op een dag bijvoorbeeld 5 uur lang naar mosselen duikt, gebruikt hij die dag in totaal bijna 2000 kJ. Dat is de vaste hoeveelheid van 850 kJ, met daarbij opgeteld een hoeveelheid die afhankelijk is van het aantal uren dat de eend naar mosselen duikt: voor het duiken zélf en voor het verteren van de opgedoken koude mosselen daarna.

15 Hoeveel energie gebruikt een duikeend per uur duiken voor alleen het verteren van de mosselen? Licht je antwoord toe.

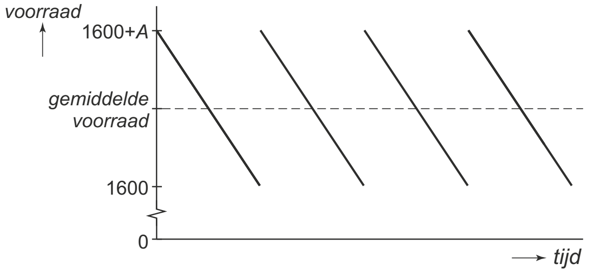
Voorraadkosten

FuelMaster produceert benzinepompen, die gebruikt worden door tankstations.
In elke benzinepomp zit een pomp. FuelMaster heeft elk jaar 40 000 pompen nodig voor zijn productie. FuelMaster bestelt zijn pompen bij PumpTech.
De bestelkosten bedragen 0,50 euro per pomp plus 300 euro per bestelling.

16 Bereken de jaarlijkse bestelkosten als er 4000 pompen per bestelling geleverd worden.

FuelMaster wil altijd minimaal 1600 pompen in voorraad hebben (dat is een reservevoorraad voor zo'n twee weken productie).
Voor het aantal pompen dat FuelMaster op enig moment in voorraad heeft, is een model opgesteld. Zie daarvoor de schets in figuur 2. De productie en dus ook het verbruik van de pompen is gelijkmatig over het jaar verdeeld. Elke bestelling wordt afgeleverd op het moment dat de voorraad nog 1600 stuks groot is.
Het aantal pompen dat FuelMaster per keer bij PumpTech bestelt, noemen we A.

figuur 2



Voor het in voorraad houden van de pompen heeft FuelMaster ook kosten. Het in voorraad houden van één pomp kost 6 euro per jaar.
De jaarlijkse voorraadkosten kunnen berekend worden door de *gemiddelde voorraad* pompen te vermenigvuldigen met de jaarlijkse kosten per pomp.

We gaan er nog even van uit dat er 4000 pompen per bestelling geleverd worden.

17 Laat zien dat de jaarlijkse voorraadkosten dan 21 600 euro bedragen.

De afdeling inkoop van FuelMaster onderzoekt bij welke bestelgrootte de jaarlijkse kosten voor het bestellen en in voorraad houden zo laag mogelijk zijn.
Men heeft daarvoor de volgende formule opgesteld:

$$K = 29\,600 + \frac{12\,000\,000}{A} + 3A$$

© ThiemeMeulenhoff

Hierin is K het totaal van de jaarlijkse bestel- en voorraadkosten in euro en A het aantal pompen dat per keer besteld wordt.

Zoals je aan de formule kunt zien, zijn de jaarlijkse kosten altijd hoger dan 29 600 euro.

18 Onderzoek uit welke vaste bedragen deze 29 600 euro is opgebouwd.

File

Het aantal auto's dat gebruik maakt van de autosnelweg A2 tussen Amsterdam (Holendrecht) en Utrecht (Oudenrijn) neemt steeds meer toe.
Deze weg is opgedeeld in 7 stukken. Voor elk stuk is het gemiddelde aantal motorvoertuigen voor een door-de-weekse-dag berekend. Zie tabel 2.

tabel 2 **Verkeersintensiteiten op de A2 in de corridor Amsterdam-Utrecht in beide richtingen samen per etmaal**

	1987			1990		
traject	Personen-auto's	Vracht-auto's	Motor-voertuigen	Personen-auto's	Vracht-auto's	Motor-voertuigen
Holendrecht-Abcoude	102 100	12 900	115 000	117 800	13 200	131 000
Abcoude-Vinkeveen	95 000	12 000	107 000	110 600	12 400	123 000
Vinkeveen-Breukelen	87 000	11 000	98 000	101 600	11 400	113 000
Breukelen-Maarssen	85 200	10 800	96 000	99 800	11 200	111 000
Maarssen-Utrecht West	83 500	10 500	94 000	99 100	10 900	110 000
Utrecht West-Utrecht C	90 600	11 400	102 000	106 100	11 900	118 000
Utrecht C-Oudenrijn	101 200	12 800	114 000	118 700	13 300	132 000

19 Op welk traject is de stijging van het aantal motorvoertuigen tussen 1987 en 1990 relatief (procentueel) het grootst? Licht je antwoord toe.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 1

1 Gebruik de rekenregels, let op de volgorde van bewerkingen.

2 Bekijk nog eens de rekenregels voor machten.

3 Het verbruik is gegeven in aantal liter per 100 km. Bereken het verbruik (in liters) per 25 000 km.

4 Bereken eerst de totale consumptie in liter per dag. (1 miljoen = 1000 000)

5 Bereken het aantal dagen in 41 jaar en bereken daarmee het verbruik per dag (1 miljard = 1000 000 000). Geeft het antwoord afgerond in miljoenen.

6 Bereken eerst G en daarna BMI.

7 In de formule van BMI kun je in plaats van G $100 \cdot L - 110$ invullen (zie formule 1).

8 Let op: bij formule 1 geldt L is in meters en bij formule 3 geldt L is in centimeters

9 Vergelijkingen mogen alleen aan elkaar gelijk gesteld worden als dezelfde eenheden gebruikt worden. Herschrijf bijvoorbeeld formule 1 zodat ook hier L in centimeters ingevuld kan worden. Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

10 Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

11 Bij P_1 betaalt hij 10 euro meer, dus $P_1 = P_2 + 10$.

12 Opbrengst = prijs pers stuk · aantal. Welke formule hoort hier bij?

13 Winst = Opbrengst – Kosten.

14 Bepaal eerst hoeveel mosselvlees één duik oplevert.

15 Welke gegevens uit de grafiek zijn nodig om het energieverbruik voor verteren te bepalen?

16 Bereken eerst het aantal bestellingen per jaar.

17 Bereken met behulp van de minimale en de maximale voorraad eerst de gemiddelde voorraad.

18 Bedenk welke kosten onafhankelijk van de bestelkosten zijn.

19 Bereken eerst voor elk traject de procentuele stijging.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 1

Rekenen

1 Gebruik de rekenregels.

a $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$

b $\frac{3}{4} + \frac{5}{7} =$ *(eerst gelijknamig maken)* $\frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 7} + \frac{5 \cdot 4}{7 \cdot 4} = \frac{21}{28} + \frac{20}{28} = \frac{41}{28} = 1\frac{13}{28}$

c $6 \cdot \frac{5}{7} = \frac{6}{1} \cdot \frac{5}{7} = \frac{30}{7} = 4\frac{2}{7}$

d $\frac{2}{3} \times 6 \times \frac{1}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{1} \times \frac{1}{5} = \frac{12}{3} \times \frac{1}{5} = 4 \times \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

e $\frac{3}{\left(\frac{2}{3}\right)} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ *(delen door een breuk: vermenigvuldig met het omgekeerde)*

f $2\frac{3}{4} + 1\frac{2}{3} = 2\frac{9}{12} + 1\frac{8}{12} = 3\frac{17}{12} = 4\frac{5}{12}$

g $\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$

h $\sqrt{1\frac{11}{25}} = \sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

i $4 \times (21 : 7 - 2) + \underline{2^2} \times 3 : 6 \times 5 - 9 =$ *(let op de volgorde van bewerkingen)*
$4 \times (3 - 2) + 4 \times 3 : 6 \times 5 - 9 =$
$4 \times (1) + 12 : 6 \times 5 - 9 =$
$4 + 2 \times 5 - 9 = 4 + 10 - 9 = 14 - 9 = 5$

j $10 \times \underline{2^3 \times \sqrt{9}} : 5 - 2 \times \underline{(3+1)} = 10 \times \underline{8 \times 3} : 5 - 2 \times \underline{(4)} = 80 \times 3 : 5 - 8 =$
$= 240 : 5 - 8 = 48 - 8 = 40$

Haakjes

2 a $3 + 4q - 5(3 - 2q) = 3 + 4q - 15 + 10q = 14q - 12$

b $(3 + 4q)(3 - 2q) = 3 \cdot 3 - 3 \cdot 2q + 4q \cdot 3 + 4q \cdot -2q = 9 - 6q + 12q - 8q^2 = 9 + 6q - 8q^2$

c $(q^2 + 2q)(1 - 2q) + 5q - 8 = (q^2)(1 - 2q) + (2q)(1 - 2q) + 5q - 8 =$
$q^2 - 2q^3 + 2q - 4q^2 + 5q - 8 = -2q^3 - 3q^2 + 7q - 8$

d $\frac{9k^4}{k^2} + 5k(k + 2) = 9k^2 + 5k^2 + 10k = 14k^2 + 10k$

e $\frac{k^2}{\left(\frac{3}{k}\right)} = k^2 \cdot \frac{k}{3} = \frac{k^2}{1} \cdot \frac{k}{3} = \frac{k^3}{3} = \frac{1}{3}k^3$ *(delen door een breuk: vermenigvuldig met het omgekeerde)*

f $\frac{\left(\frac{k^3}{6}\right)}{2k} = \frac{k^3}{6} \cdot \frac{1}{2k} = \frac{k^3}{12k} = \frac{k^2}{12} = \frac{1}{12}k^2$

g $(q^2)^3 \cdot 5q = q^6 \cdot 5q = 5q^7$

h $P = 100 \cdot (1 - 0{,}61^t) - 50 \cdot t \cdot 0{,}61^t = 100 - 100 \cdot 0{,}61^t - 50 \cdot t \cdot 0{,}61^t =$
$100 + (-100 - 50 \cdot t) \cdot 0{,}61^t = 100 + (-50 \cdot t - 100) \cdot 0{,}61^t$
Dus $a = 100$, $b = -50$ en $c = -100$

i Uit de formule $\frac{f \cdot d}{15} = 0{,}3$ volgt $f \cdot d = 15 \cdot 0{,}3$ en dat geeft $f = \frac{4{,}5}{d}$

j Uit de formule volgt (neem kwadraat): $R^2 = 10\,000 \cdot \frac{A}{4{,}9}$.
Dus $4{,}9 \cdot R^2 = 10\,000 \cdot A$ en $A = \frac{4{,}9}{10\,000} \times R^2$
Dus $c = \frac{4{,}9}{10\,000} = 0{,}00049$ en dus $A = 0{,}00049 \cdot R^2$

Benzineverbruik

3 *Het gaat om het aantal liter. Dus het verbruik is hier belangrijk.*
Het totaal aantal km per jaar is 25 000 km.
eerste manier:
Volgens de fabrikant is het verbruik 4,3 liter per 100 liter.
Dus dit is totaal 250 · 4,3 = 1075 liter.
Volgens de ecotest is het verbruik 5,0 liter per 100 liter.
Dus dit is totaal 250 · 5,0 = 1250 liter.
Dus volgens de ecotest moet John per jaar 1250 – 1075 = 175 liter meer tanken.
tweede manier:
Het verschil in verbruik 5,0 – 4,3 = 0,7 liter per 100 liter.
Dus dit is totaal 250 · 0,7 = 175 liter.
Dus volgens de ecotest moet John per jaar 175 liter meer tanken.

Olie

4 1 miljoen = 1000 000
Eén vat = 159 liter olie dus
20 071 000 vaten = 20 071 000 · 159 liter = 3 191 289 000 liter
293 000 000 inwoners verbruiken 3 191 289 000 liter olie per dag.
$\frac{3\,191\,289\,000}{293\,000\,000} \approx 10{,}89$
Conclusie: per inwoner is de olieconsumptie per dag gemiddeld 11 liter.

5 1 miljard = 1000 000 000
41 jaar = 41 · 365 dagen = 14 965 dagen.
Reserves in de hele wereld eind 2003 = 1147 700 000 000 vaten.
Alles is op na 41 jaar als er per dag $\frac{1147\,700\,000\,000}{14\,965} \approx 76\,692\,281{,}99$ vaten worden verbruikt.
Conclusie: er worden dan 77 miljoen vaten per dag geconsumeerd.

Als er in de berekening rekening wordt gehouden met schrikkeljaren, dan wordt dat natuurlijk ook goed gerekend.

Gezond gewicht

6 Formule 1: $G = 100 \cdot L - 110$ met G gewicht in kilogrammen en L lengte in meters.
De lengte van de vrouw is 176 cm = 1,76 m = L.
Het ideale gewicht volgens formule 1 is dan: $G = 100 \cdot 1{,}76 - 110 = 66$ kg.
$BMI = \frac{1}{1{,}76^2} \cdot 66 \approx 21{,}3$ (formule 2).

7 $G = 100 \cdot L - 110$ en $BMI = \frac{1}{L^2} \cdot G$ dus
$BMI = \frac{1}{L^2} \cdot (100 \cdot L - 110) = \frac{100 \cdot L - 110}{L^2}$

8 *Bedenk dat bij formule 1 geldt: L is in meters en bij formule 3 geldt L is in centimeter*
formule 1: $G = 100 \cdot L - 110 = 100 \cdot 1{,}72 - 110 = 62$
formule 3: $G = 45{,}4 + 0{,}89 \cdot (L - 152{,}4) = 45{,}4 + 0{,}89 \cdot (172 - 152{,}4) =$
$45{,}4 + 0{,}89 \cdot (19{,}6) = 62{,}844$
Conclusie: formule 3 levert de grootste uitkomst.

9 *Bedenk dat bij formule 1 geldt: L is in meters en bij formule 3 geldt L is in centimeter. Vergelijkingen mogen alleen aan elkaar gelijk gesteld worden als dezelfde eenheden gebruikt worden. Formule 1 herschrijven zodat ook hier L in centimeter wordt ingevuld.*
formule 1: $G = 100 \cdot L - 110$ met L in meter is hetzelfde als $G = L - 110$ met L in centimeter *(ga dit zelf na door bijvoorbeeld in de eerste vergelijking 1,72 meter en in de tweede vergelijking 172 cm in te vullen).*
De volgende vergelijking moet nu worden opgelost:
$L - 110 = 45{,}4 + 0{,}89 \cdot (L - 152{,}4)$ *eerst haakjes wegwerken*
$L - 110 = 45{,}4 + 0{,}89 \cdot L - 0{,}89 \cdot 152{,}4$
$L - 110 = 45{,}4 + 0{,}89 \cdot L - 135{,}636$
$L - 0{,}89 \cdot L = 45{,}4 - 135{,}636 + 110$
$0{,}11 \cdot L = 19{,}764$
$L = \frac{19{,}764}{0{,}11} \approx 179{,}67$ cm oftewel ongeveer 1 meter en 80 cm.

Autoverhuurbedrijf

10 $P_1 = 40 + 0{,}56k$ en $P_2 = 64 + 0{,}40k$
De bedrijven zijn even duur als $P_1 = P_2$ dus los op
$40 + 0{,}56k = 64 + 0{,}40k$
$0{,}56k - 0{,}40k = 64 - 40$
$0{,}16k = 24$
$k = \frac{24}{0{,}16} = 150$
Dus bij een afstand van 150 km zijn de bedrijven even duur.

11 $P_1 = 40 + 0{,}56k$ en $P_2 = 64 + 0{,}40k$
P_1 is 10 euro duurder als P_2 dus $P_1 - P_2 = 10$, dus los op
$40 + 0{,}56k - (64 + 0{,}40k) = 10$ *(vergeet niet de haakjes om P_2)*
$40 + 0{,}56k - 64 - 0{,}40k = 10$
$0{,}16k = 10 - 40 + 64 = 34$
$k = \frac{34}{0{,}16} = 212{,}5$
Marc moet dus 212,5 km rijden.

Opbrengst en winst

12 Het aantal is v en de prijs is 5 euro per stuk dus de opbrengst $O = 5v$.

13 Winst W = opbrengst – kosten dus $W = O - K$.
$W = 5v - (1600 + 3v)$ *(vergeet niet de haakjes om K).*
$W = 5v - 1600 - 3v = 2v - 1600$
Er wordt winst gemaakt als $W > 0$ dus als $2v - 1600 > 0$ dus als $2v > 1600$ dus als $v > 800$. Bij een verkoop van 800 vazen is de winst 0, vanaf een verkoop van 801 dus wordt er winst gemaakt.

 © ThiemeMeulenhoff

Duikeend

14 Een mossel en het schelpmateriaal wegen 6 gram.
Het mosselvlees is 5% van 6 gram, dus $0{,}05 \cdot 6 = 0{,}3$ gram.
De dagelijkse behoefte van een duikeend is 120 gram mosselvlees.
Per duik slikt hij 0,3 gram mosselvlees in.
Het totaal aantal duiken per dag is $\frac{120}{0{,}3} = 400$.

15 *Onderstaande gegevens aflezen in de figuur.*
Na 8 uur duiken is het totale energieverbruik ongeveer 2630 kJ.
Na 8 uur duiken is het energieverbruik zonder verteren ongeveer 1685 kJ.
Voor het verteren is per 8 uur ongeveer 2630 – 1685 = 945 kJ nodig.
Per uur duiken is er voor het verteren $\frac{945}{8} \approx 118$ kJ nodig.
Een antwoord tussen 110 en 120 kJ wordt goed gerekend.

Voorraadkosten

16 Er zijn per jaar 40 000 pompen nodig. Per keer worden er 4000 pompen geleverd.
Er zijn 40 000 : 4000 = 10 bestellingen per jaar.
De bestelkosten zijn 300 euro per bestelling + 0,50 euro per pomp.
Jaarlijkse bestelkosten = $300 \cdot 10 + 0{,}50 \cdot 40\,000 = 23\,000$ euro.

17 Op het moment dat er nog 1600 pompen op voorraad zijn, worden er 4000 pompen geleverd.
Minimaal zijn er 1600 pompen op voorraad en maximaal 1600 + 4000 = 5600.
Gemiddeld zijn er (1600 + 5600) : 2 = 3600 pompen op voorraad.
Totale voorraadkosten = $3600 \cdot 6$ = € 21 600,-

18 *De vaste kosten zijn € 29 600.*
De totale bestelling per jaar is 40 000 pompen
K is het totaal van bestelkosten en voorraadkosten in euro.
De bestelkosten zijn 0,50 euro per pomp en 300 euro per bestelling.
De voorraadkosten bereken je met: gemiddelde voorraad · 6 euro.

Onafhankelijk van de bestelgrootte A zijn
– bestelkosten voor alle pompen dus totaal $40\,000 \cdot 0{,}50 = 20\,000$ euro
– de voorraadkosten voor de vaste voorraad dus $1600 \cdot 6 = 9600$ euro
Totale kosten onafhankelijk van A zijn dus 20 000 + 9600 = 29 600 euro

© ThiemeMeulenhoff

File

19 *Relatief, dus de procentuele stijging wordt gevraagd van het aantal motorvoertuigen tussen 1987 en 1990.*

Relatieve toename: bereken $\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \cdot 100\% = \frac{\text{absolute toename}}{\text{hoeveelheid in 1987}} \cdot 100\%$

traject	1987	1990	Absolute toename	Relatieve toename
Holendrecht-Abcoude	115 000	131 000	16 000	13,9%
Abcoude-Vinkeveen	107 000	123 000	16 000	14,9%
Vinkeveen-Breukelen	98 000	113 000	15 000	15,3%
Breukelen-Maarssen	96 000	111 000	15 000	15,6%
Maarssen-Utrecht West	94 000	110 000	16 000	17,0%
Utrecht West-Utrecht C	102 000	118 000	16 000	15,7%
Utrecht C-Oudenrijn	114 000	132 000	18 000	15,8%

Conclusie: de relatieve toename is het grootst op het traject Maarssen-Utrecht West.

© ThiemeMeulenhoff

2 Tabellen en grafieken

Parkeeronderzoek

Een van de methoden om inzicht te verkrijgen in aantallen parkeringen en parkeerduren in een bepaald gebied is het middel van kentekenonderzoek. Met vaste tussenpozen (het waarnemingsinterval) worden daarbij de kentekens van de geparkeerde auto's geregistreerd. Het aantal achtereenvolgende malen dat een auto is geregistreerd (registratiefrequentie) levert een schatting op van de parkeerduur per auto, terwijl het aantal verschillende auto's dat is geregistreerd een schatting oplevert van het aantal parkeringen.
Zo'n parkeeronderzoek is gehouden te Heerlen en resultaten daarvan staan in tabel 1.

tabel 1

registratie-frequentie	aantal auto's	geschatte parkeer-duur (in min.)
1	5247	60
2	1804	120
3	753	180
4	359	240
5	287	300
6	443	360
7	290	420
8	165	480
9	115	540
	totaal 9463	gemiddeld 133

frequentieverdeling van het aantal achtereenvolgende malen dat geparkeerde auto's zijn geregistreerd

waarnemingsinterval: 60 min.
eerste waarneming: 9.30 uur
laatste waarneming: 17.30 uur
parkeerterrein open: 8.30-18.30 uur

Van 1804 auto's is de registratiefrequentie 2. De geschatte parkeerduur van elk van die auto's (bij die parkering) is 120 minuten. De werkelijke parkeerduur kan natuurlijke korter of langer zijn.

1 Hoe lang is de werkelijke parkeerduur op zijn hoogst?

In tabel 1 staat dat het gemiddelde van de geschatte parkeerduur 133 minuten is.

2 Leg uit hoe je dat gemiddelde met de overige gegevens uit de tabel kunt uitrekenen.

De hier beschreven onderzoeksmethode levert een schatting van de gemiddelde parkeerduur per auto op die hoger is dan de werkelijke gemiddelde parkeerduur per auto.

3 Leg uit wat daarvan de oorzaak kan zijn.

© ThiemeMeulenhoff

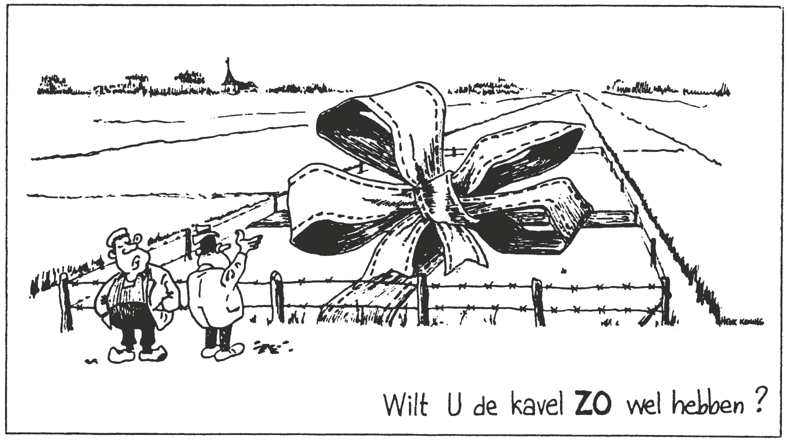
Ruilverkaveling

In het dorp Groenoord hebben 200 inwoners elk een eigen landbouwbedrijf.
In tabel 2 zijn deze bedrijven naar grootte in 4 groepen verdeeld. Van elke groep is de gemiddelde bedrijfsgrootte bepaald. Bovendien is elke groep voorzien van een kleurcode.
Ga er in het vervolg van uit dat elk bedrijf een grootte heeft, die precies gelijk is aan het gemiddelde van de betreffende groep.

tabel 2

gemiddelde bedrijfsgrootte	kleurcode	aantal
2 ha	oranje	65
12 ha	rood	95
30 ha	blauw	37
90 ha	groen	3

Voor een goede bedrijfsvoering is het belangrijk dat alle landbouwgrond van één eigenaar dicht bij de bedrijfsgebouwen ligt. Bij ruilverkaveling probeert men door onderling ruilen de verspreid liggende stukken grond (kavels) te vervangen door één kavel.



Alle 200 eigenaren komen in een zaal van restaurant ‘Den Hommel’ bijeen om te stemmen over een voorstel tot ruilverkaveling.
Elke eigenaar stemt voor of tegen het voorstel en vermeldt op zijn stembriefje bovendien zijn kleurcode.
Voor het bepalen van de uitslag van de stemming heeft de overheid de volgende procedure voorgeschreven:
Eerst wordt het aantal voorstemmers vergeleken met het aantal tegenstemmers. Is het aantal voorstemmers groter dan het aantal tegenstemmers, dan is het voorstel aangenomen
Is dat niet het geval, dan worden de stembriefjes opnieuw bekeken.
Men bepaalt dan aan de hand van de kleurcodes de totale oppervlakte van de bedrijven van de voorstemmers. Is die oppervlakte groter dan de totale oppervlakte van de bedrijven van de tegenstemmers, dan is het voorstel alsnog aangenomen; zo niet, dan is het verworpen.

Stel dat de stemming in Groenoord verloopt zoals weergegeven in tabel 3.

tabel 3

kleur	oranje	rood	blauw	groen
aantal voorstemmers	5	50	22	3
aantal tegenstemmers	60	45	15	0

4 Ga na of het voorstel tot ruilverkaveling in Groenoord dan is aangenomen of afgewezen. Licht je antwoord toe.

De stemprocedure bij ruilverkaveling maakt het mogelijk dat bij minder dan 50% voorstanders de ruilverkaveling toch wordt aangenomen. In de situatie van Groenoord is uit te zoeken met hoe weinig voorstemmers de ruilverkaveling toch aangenomen zou kunnen worden.

5 Wat is het kleinste aantal voorstemmers, waarbij de ruilverkaveling in Groenoord kan worden aangenomen? Licht je antwoord toe.

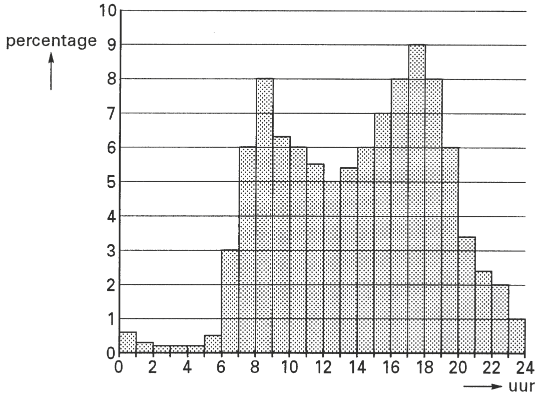
Praktische capaciteit van een weg

De capaciteit van een autoweg is het maximale aantal auto’s dat die weg per uur kan verwerken. De capaciteit zou zeer groot zijn als alle voertuigen met dezelfde hoge snelheid heel dicht achter elkaar zouden rijden. Natuurlijk is dat in de praktijk niet mogelijk. Daarom gebruikt men het begrip ‘praktische capaciteit’. Als de praktische capaciteit wordt overschreden, ontstaan er files. De praktische capaciteit van een weg hangt onder andere af van de indeling van die weg (zie tabel 4).

tabel 4

wegindeling	praktische capaciteit in voertuigen per uur
2 rijstroken	900
3 rijstroken	1500
4 rijstroken zonder middenberm	3900
4 rijstroken met middenberm	4000

Er wordt een autoweg aangelegd met 4 rijstroken met middenberm. Uit onderzoek is bekend hoe op dit soort wegen de verkeersdrukte over de dag verdeeld is.
In het diagram op de volgende bladzijde is voor elk uur af te lezen hoeveel procent van het dagelijkse totale aantal voertuigen van zo’n weg gebruik maakt.



De plannenmakers nemen aan dat deze verdeling van de verkeersdrukte ook voor deze nieuwe weg zal gelden en dat de praktische capaciteit van de weg geen enkel uur overschreden zal worden.

6 Hoeveel voertuigen zullen er dan maximaal per dag over deze weg rijden? Licht je antwoord toe.

Behalve van de wegindeling (tabel 4) is de praktische capaciteit van een weg ook afhankelijk van: het percentage vrachtverkeer en de breedte van de rijstroken.

Tabel 4 geldt voor wegen zonder vrachtverkeer met rijstroken die 3,60 m breed zijn. Uitgaande van de getallen in tabel 4 kan met behulp van tabel 5 en tabel 6 worden berekend hoe groot de praktische capaciteit van een weg in sommige andere gevallen is.

tabel 5 Correctiepercentage voor de praktische capaciteit bij toenemend vrachtverkeer

vrachtauto's in % van het totale verkeer	tweestrookswegen	meerstrookswegen
0	100%	100%
10	88%	91%
20	78%	83%

tabel 6 Correctiepercentage voor de praktische capaciteit bij kleiner wordende rijstrookbreedte

rijstrookbreedte	3,60 m	3,30 m	3,00 m	2,70 m
tweestrooksweg	100%	86%	77%	70%
meerstrooksweg	100%	97%	91%	81%

We geven een voorbeeld. Een weg met 4 rijstroken met middenberm heeft volgens tabel 4 een praktische capaciteit van 4000 voertuigen per uur. Als er 10% vrachtverkeer is, zal de praktische capaciteit nog slechts 91% van 4000 zijn, dus 3640 voertuigen per uur. Als de rijstrookbreedte 2,70 m is, neemt de praktische capaciteit nog verder af tot 81% van 3640, dus 2948 voertuigen per uur.

© ThiemeMeulenhoff

Tussen 2 dorpen ligt een weg met 2 rijstroken. Vrachtverkeer vormt 20% van het totale verkeer. De rijstrookbreedte is 2,70 m. De praktische capaciteit van deze weg is te klein. Men wil die praktische capaciteit verhogen. Neem aan dat het percentage vrachtauto's niet zal veranderen.

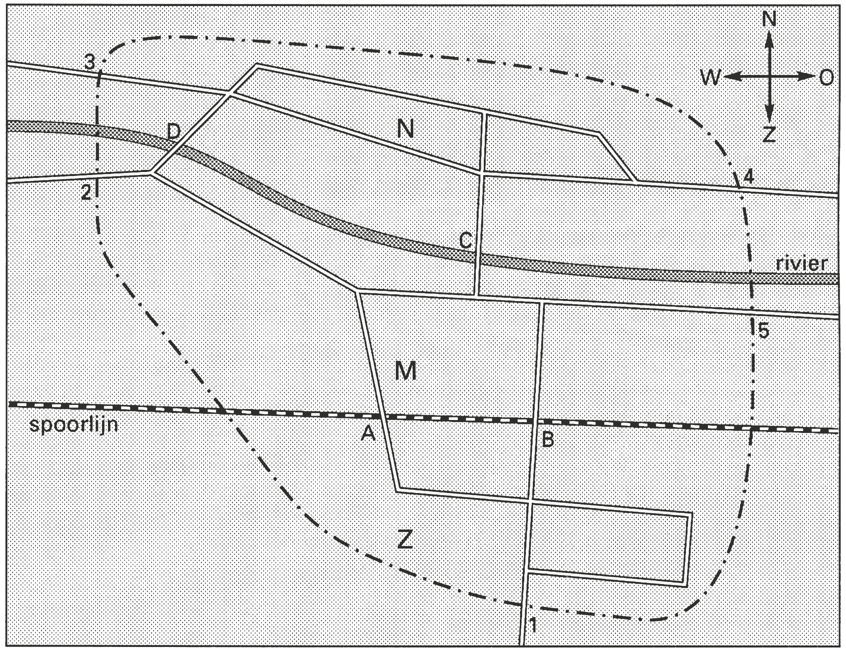
7 Bereken de praktische capaciteit van de weg als er aan deze weg een derde rijstrook wordt toegevoegd die ook 2,70 m breed is.

Er is ook een andere mogelijkheid om de praktische capaciteit van de weg te verhogen. Men kan de twee rijstroken van deze weg verbreden naar 3,00 m, 3,30 m of 3,60 m.

8 Bereken de minimale rijstrook breedte die nodig is om een praktische capaciteit van minstens 600 te bereiken.

Autoverkeer

Een dorp wordt door een rivier en een spoorlijn in drie wijken verdeeld, Noord, Midden en Zuid (N, M en Z). Er zijn in het dorp twee spoorovergangen (A en B) en twee bruggen (C en D) (zie onderstaand figuur).



Het toenemend autoverkeer levert problemen op in het centrum van het dorp.
Te veel auto's maken gebruik van spoorwegovergang B en brug C.

© ThiemeMeulenhoff

Om maatregelen te kunnen nemen, moet men meer inzicht hebben in de verschillende verkeersstromen in het dorp. Hoeveel auto's komen waar vandaan en gaan waar naar toe?
Op een willekeurige werkdag in 1989 heeft men tijdens de avondspits een kentekenonderzoek gedaan. Op een aantal plaatsen in het dorp en aan de rand van het dorp (1 t/m 5) werden de kentekens van de passerende auto's en het tijdstip genoteerd. Op grond van deze registraties heeft men achteraf de autoritten zo goed mogelijk gereconstrueerd. Ondanks het feit dat het onmogelijk is om elke autorit precies te reconstrueren, levert zo'n onderzoek een vrij betrouwbaar beeld op. Het resultaat staat in tabel 7.

tabel 7

		naar								
		Z	M	N	1	2	3	4	5	totaal
	Z	333	155	107	216	44	25	50	41	971
	M	140	109	114	86	59	20	32	27	587
	N	111	112	176	62	106	31	43	25	666
van	1	280	96	98	33	17	7	18	37	586
	2	42	101	132	17	8	17	116	7	440
	3	26	22	36	11	26	1	22	1	145
	4	37	25	38	13	56	17	2	4	192
	5	48	32	28	19	24	3	5	1	160
	totaal	1017	652	729	457	340	121	288	143	3747

Je leest bijvoorbeeld in tabel 7 af dat 98 autoritten aan de rand van het dorp bij 1 begonnen en eindigden in Noord (N).
In het onderzoeksrapport staat dat 2/3 deel van alle autoritten interlokaal verkeer betrof (interlokaal verkeer is verkeer dat van buiten het dorp komt en/of dat een bestemming heeft buiten het dorp).

9 Onderzoek of dit klopt met de gegevens in tabel 7.

Neem aan dat brug D uitsluitend gebruikt wordt voor de autoritten van 2 naar 3, N of 4 en omgekeerd.

10 Bereken het aantal autoritten over brug D.

Men kan het dorp aan drie kanten binnenrijden en verlaten, namelijk aan de westkant, de oostkant en de zuidkant.

11 Bereken aan welke kant van het dorp de autostroom het grootst is.

© ThiemeMeulenhoff

Zuinig rijden

Tijdens rijlessen leer je om in de auto bij 20 km per uur van de eerste naar de tweede versnelling te schakelen.
Daarna ga je bij 40 km per uur naar de derde versnelling, bij 60 km per uur naar de vierde en ten slotte rond de 90 km per uur naar de vijfde.
Iedere versnelling heeft een ideale snelheid.
Maar is dat ook de zuinigste snelheid?
Om dit te onderzoeken heeft men met dezelfde auto steeds met andere snelheden en in een andere versnelling telkens hetzelfde traject afgelegd en daarbij steeds de literafstand L (de afstand die je met 1 liter benzine kunt afleggen) gemeten.
Een deel van de resultaten staat in tabel 8.

tabel 8

literafstand bij 80 km per uur			
versnelling	3	4	5
literafstand L (km)	16,92	19,63	21,68

In tabel 8 kun je zien dat je bij 80 km per uur het beste in de vijfde versnelling kunt rijden, omdat je dan 21,68 km kunt afleggen met 1 liter benzine.

Je rijdt op dit traject met een snelheid van 80 km per uur. Je begint met een volle tank van 35 liter benzine en je rijdt die tank helemaal leeg.

12 Bereken hoeveel km je in de vijfde versnelling meer kunt afleggen dan in de vierde versnelling.

In tabel 9 staat de literafstand L voor verschillende snelheden in de vijfde versnelling.

tabel 9

literafstand in de vijfde versnelling						
snelheid v (km per uur)	40	50	60	70	80	90
literafstand L (km)	29,03	27,19	25,35	23,51	21,68	19,84

Je legt in de vijfde versnelling een traject van 300 km af. Als je 80 km per uur rijdt, heb je deze afstand sneller afgelegd dan wanneer je 60 km per uur rijdt.
Maar je verbruikt wel meer benzine.

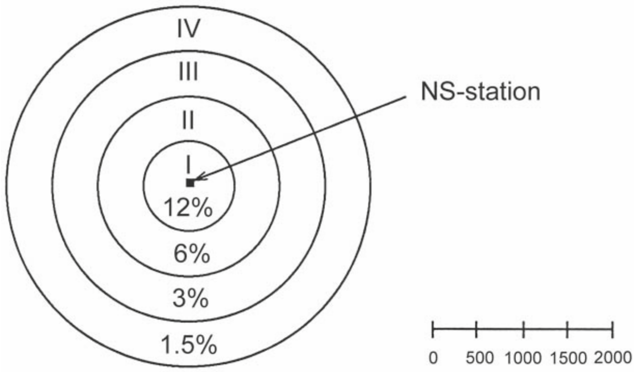
13 Bereken hoeveel liter benzine je dan meer verbruikt.

© ThiemeMeulenhoff

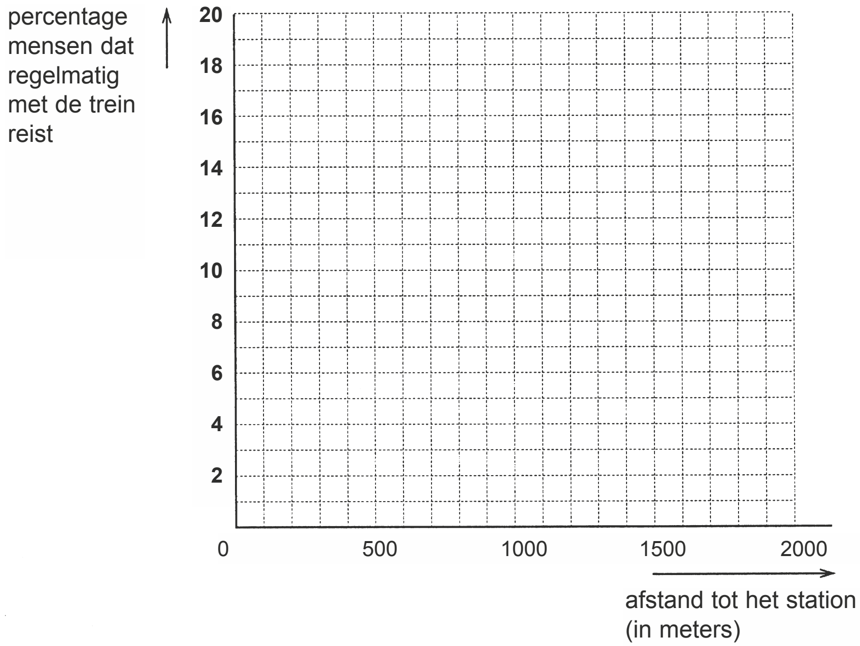
Nederlandse Spoorwegen

Volgens de Nederlandse Spoorwegen is de afstand van huis tot het dichtsbijzijnde NS-station van invloed op de beslissing om wel of niet met de trein te reizen.
Men heeft ontdekt dat binnen een straal van 500 meter van het station 12% van de mensen regelmatig van de trein gebruik maakt. In elke volgende ‘ring’ met een breedte van 500 meter is het 2/3 percentage gehalveerd. Zie onderstaand figuur.

Zo is bijvoorbeeld in de ring van 1000 tot en met 1500 meter het percentage gelijk aan 3%.



14 Teken in de figuur hieronder een grafiek die het verband illustreert tussen het percentage mensen dat regelmatig per tein reist en de afstand (in meters) van de woning tot het dichtsbijzijnde NS-station.

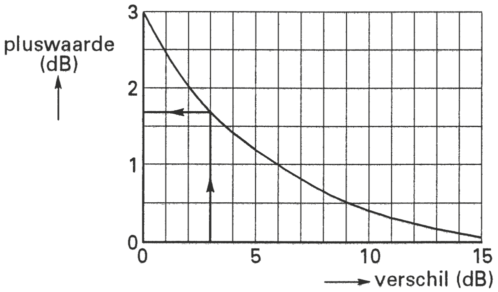


Lawaai van machines

Deze opgave gaat over lawaai dat door machines wordt veroorzaakt. De hoeveelheid lawaai die een machine maakt, noemen we het geluidsniveau van die machine.
Het geluidsniveau wordt uitgedrukt in decibel (dB).
Stel dat in een fabriekshal twee machines geluid veroorzaken. Het totale geluidsniveau van de twee machines is *niet* de som van de afzonderlijke geluidsniveaus, maar het hoogste van de twee geluidsniveaus vermeerderd met een zogenaamde pluswaarde.
Met behulp van figuur 1 wordt de pluswaarde als volgt gevonden:

1 meet de afzonderlijke geluidsniveaus van de twee machines.
2 bereken het verschil van deze twee geluidsniveaus.
3 lees in de figuur af welke pluswaarde bij dit verschil hoort.

figuur 1



Voorbeeld:

1 geluidsniveau machine 1: 82,7 dB,
geluidsniveau machine 2: 85,7 dB.
2 verschil: 3,0 dB.
3 pluswaarde: 1,7 dB (zie figuur 3).
4 totale geluidsniveau: 85,7 + 1,7 = 87,4 dB.

Stel dat twee machines elk een geluidsniveau van x dB hebben.

15 Hoe groot is het geluidsniveau van de twee machines samen, uitgedrukt in x? Licht je werkwijze toe.

Het totale geluidsniveau van twee of meer machines kan opgevat worden als het geluidsniveau van één grotere machine. Met de boven beschreven werkwijze kan dan ook het totale geluidsniveau van grotere aantallen machines worden berekend.

In een fabriekshal wil men een aantal machines van hetzelfde type neerzetten. Elke machine heeft een geluidsniveau van 44,0 dB.

16 Hoe groot is het totale geluidsniveau van drie machines? Licht je antwoord toe.

Voor andere aantallen machines is het geluidsniveau in de tabel aangegeven.

tabel 10

aantal machines n	1	4	5	8
totaal geluidsniveau G	44,0	50,0	51,0	53,0

17 Bereken met behulp van tabel 10 en figuur 1 het geluidsniveau G zowel bij n = 10 als bij n = 17.

Weerbeleving

Aan bezoekers van het Nederlandse strand is op een aantal dagen gevraagd hoe zij het weer beoordelen. Omdat dagen met neerslag door vrijwel iedereen als onaangenaam worden ervaren, heeft men zich bij de enquête beperkt tot droge dagen. Factoren die dan nog een rol spelen bij de beoordeling zijn onder andere: temperatuur, (mate van) bewolking en windsnelheid.
Het onderzoek heeft geleid tot onderstaand diagram met waarderingscijfers.

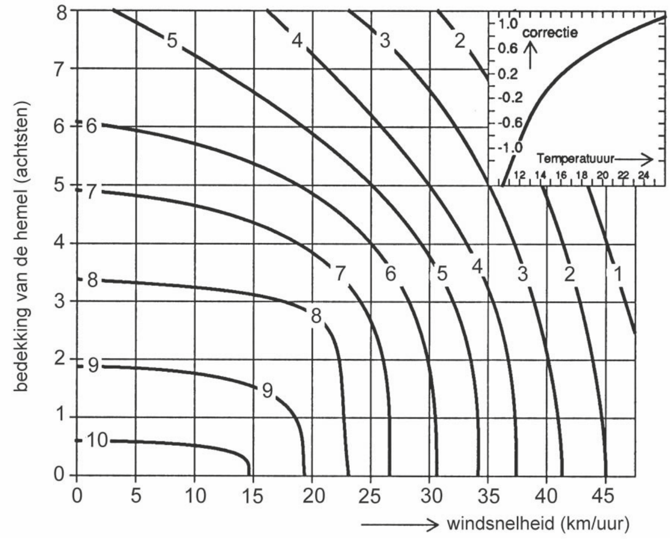


Diagram voor het bepalen van de aangenaamheid van droog weer. Horizontaal staat de windsnelheid op 10 meter hoogte en verticaal de bedekkingsgraad van de hemel in achtsten (geheel bewolkt is dus 8 achtsten). De kromme lijnen geven het waarderingscijfer, dat loopt van 0-10. Bij een windsnelheid van 18 km/uur en een halfbewolkte hemel zou men het weer dus cijfer 7 geven.
Het grafiekje rechts boven geeft de temperatuurcorrectie op dit cijfer aan. Als het bijvoorbeeld 18 graden is, dan moet men 0,4 bij het waarderingscijfers optellen; bij 12 graden moet er één punt af.

18 Voor welke temperatuur kun je de waarderingscijfers rechtstreeks uit het diagram aflezen?

In het zomerseizoen spreekt men van een recreatiedag als het waarderingscijfer 7 of hoger is. Op een dag is het 20 graden, half bewolkt en is de windsnelheid 20 km/uur.

19 Is er sprake van een recreatiedag? Licht je antwoord toe.

Het weerbericht luidt: licht tot half bewolkt (2 achtste tot 4 achtste), windsnelheid 15 tot 25 km/uur.

20 Hoe hoog moet de temperatuur zijn, wil men met zekerheid kunnen spreken van een recreatiedag? Licht je antwoord toe.

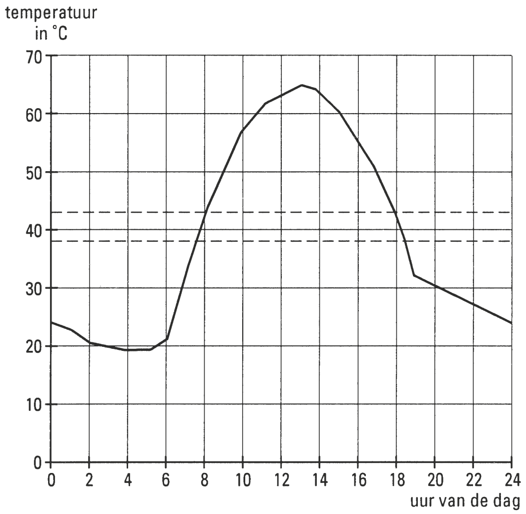
In het diagram zie je dat de kromme lijnen die bij de waarderingscijfers horen in de hoek links beneden bijna horizontaal lopen.

21 Welke gevolgtrekking kun je hieruit maken?

Woestijnhagedis

De woestijnhagedis (dipsosaurus dorsalis) leeft in de woestijnen van Californië (V.S.). In deze woestijn zijn er dagelijks grote temperatuurschommelingen. In de zomer kan de temperatuur op een dag variëren van ongeveer 20 °C tot ongeveer 65 °C. In de winter kan het er zelfs vriezen. Omdat de hagedis een koudbloedig dier is, is zijn gedragspatroon erg afhankelijk van de temperatuur.
Hieronder zie je het temperatuurverloop voor een zomerdag (eind juli/begin augustus) in de Californische woestijn. Deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus.
Alleen als de temperatuur tussen de 38 °C en 43 °C ligt, is de hagedis voortdurend buiten zijn hol actief met het zoeken naar voedsel.

Dagelijks temperatuurverloop in de periode eind juli/begin augustus.



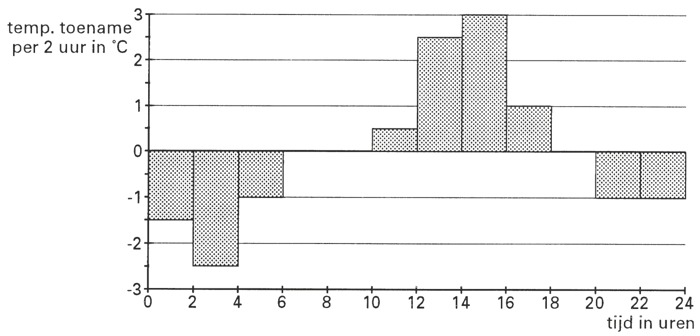
22 Hoeveel uur per dag is de hagedis in de periode eind juli/begin augustus voortdurend buiten zijn hol actief? Licht je antwoord toe. Gebruik daarbij bovenstaand figuur.

In de figuur is te zien dat de temperatuur tussen 6 en 11 uur vrij snel stijgt.

23 Bereken voor deze periode de gemiddelde temperatuurstijging per uur.

Gedurende de tijd dat de hagedis niet actief is met het zoeken naar voedsel, bevindt hij zich voornamelijk in zijn hol. In figuur 2 zie je een toename-/afnamediagram van de temperatuur in het hol. Ook deze figuur is typerend voor alle dagen in de periode eind juli/begin augustus. Omdat het niet zo eenvoudig was deze temperatuurmetingen te verrichten, kun je hierin slechts aflezen hoeveel de temperatuur per 2 uur is gestegen of gedaald. Zo kun je bijvoorbeeld aflezen dat de temperatuur tussen 0 en 2 uur met 1,5 graden is gedaald.

figuur 2 temperatuurverloop in het hol



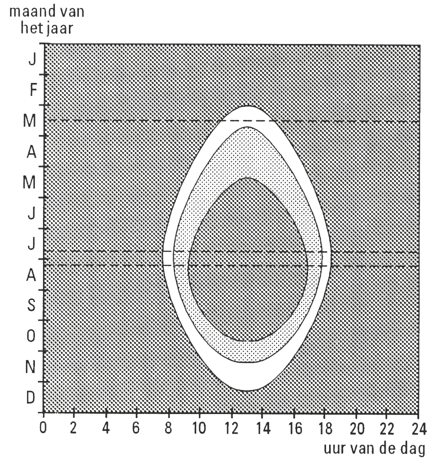
Er zijn twee belangrijke verschillen tussen het temperatuurverloop buiten het hol en in het hol. Het ene heeft betrekking op de temperatuurschommeling, het andere op het tijdstip waarop de maximale temperatuur optreedt.

24 Beschrijf deze twee verschillen.

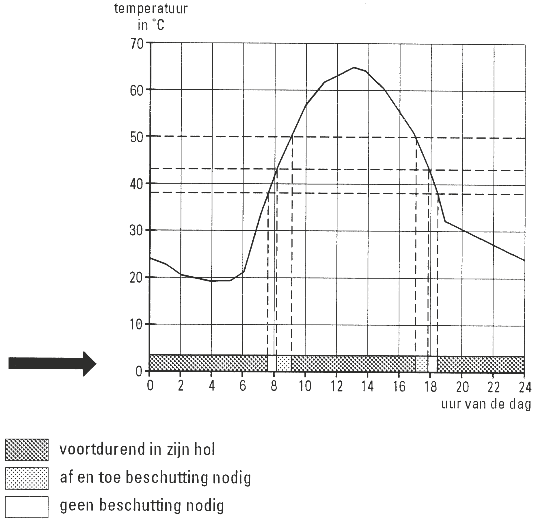
Zoals al vermeld, is de woestijnhagedis buiten zijn hol als de temperatuur tussen 38 °C en 43 °C is. Hij heeft dan *geen beschutting* nodig. Als de temperatuur tussen de 43 °C en 50 °C is, dan moet hij *af en toe beschutting* zoeken tegen de zon. Bij alle andere temperaturen bevindt hij zich *voortdurend in zijn hol*.
Er zijn dus drie fasen in het leefritme van de hagedis:
- *geen beschutting nodig;*
- *af en toe beschutting nodig;*
- *voortdurend in zijn hol.*

In figuur 3 kunnen we voor iedere dag van het jaar en voor ieder tijdstip op die dag de fase terugvinden waarin het leefritme van de hagedis zich bevindt.
Bovendien is er in figuur 3 een horizontaal strookje rond eind juli/begin augustus aangegeven. Dit strookje zien we in figuur 4 terug. In figuur 4 zie je nogmaals het temperatuurverloop in die periode.

figuur 3



figuur 4

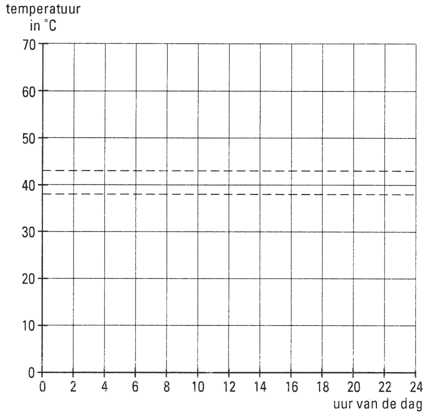


In figuur 3 is te zien dat de hagedis niet iedere dag even lang in de fase voortdurend in zijn hol zit. Er is één dag waarop hij de minste tijd in deze fase doorbrengt. Op die dag is de totale tijd van de andere twee fasen dus zo groot mogelijk.

25 In welke maand valt deze dag? Licht je antwoord toe.

In figuur 3 zie je bij half maart een horizontale stippellijn staan.

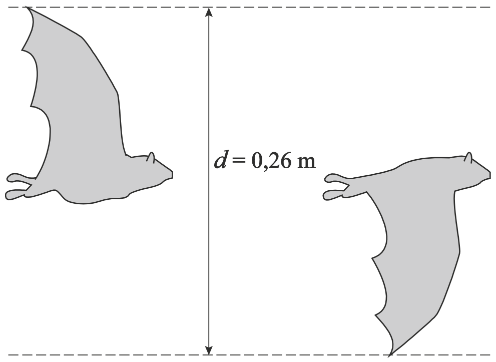
26 Teken met behulp van de gegevens van figuur 3 een grafiek van een mogelijk temperatuurverloop op 15 maart in onderstaand figuur.



Vliegen en zwemmen

Uit biologisch onderzoek blijkt dat vogels, vleermuizen en insecten op een vergelijkbare manier met hun vleugels bewegen als vissen met hun staartvin.
Onderzoekers hebben een verband ontdekt tussen de **slagfrequentie** (het aantal slagen per seconde van de vleugels of staartvin), de **slaggrootte** (de afstand tussen de uiterste staartvin- of vleugelstanden tijdens een slag, zie figuur 5) en de **kruissnelheid** (de gemiddelde snelheid).

figuur 5 **de slaggrootte van een vleermuis**



Voor dieren als vissen, dolfijnen, vogels en insecten is het verband hetzelfde.
Er geldt namelijk:

$$\frac{f \cdot d}{v} = 0{,}3$$

Dit wordt wel de formule van Strouhal genoemd.
In deze formule is:
- f de slagfrequentie (het aantal slagen per seconde van de vleugels of staartvin);
- d de slaggrootte (in meter);
- v de kruissnelheid (in meter per seconde).

De kolibrie is een klein vogeltje dat vliegt met een hoge slagfrequentie.
Een kolibrie heeft een slaggrootte van 8 cm en een kruissnelheid van13,5 meter per seconde.

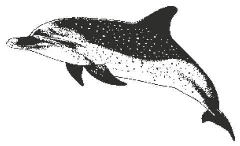
27 Toon aan dat een kolibrie een slagfrequentie van ruim 50 heeft.

28 Geef voor de kolibrie de duur van 1 slag in seconden in 2 decimalen nauwkeurig.

In de formule van Strouhal komt een recht evenredig en een omgekeerd evenredig verband voor.
De formule van Strouhal die hoort bij een vleermuis (figuur 5) ziet er als volgt uit:

$$\frac{f \cdot 0{,}26}{v} = 0{,}3$$

29 Welk van de twee genoemde verbanden geldt tussen f en v? Licht je antwoord toe.



De tuimelaar (een dolfijnensoort) heeft een kruissnelheid van 15 meter per seconde.
Voor de tuimelaar kan f worden uitgedrukt in d:

$$f = \frac{4{,}5}{d}$$

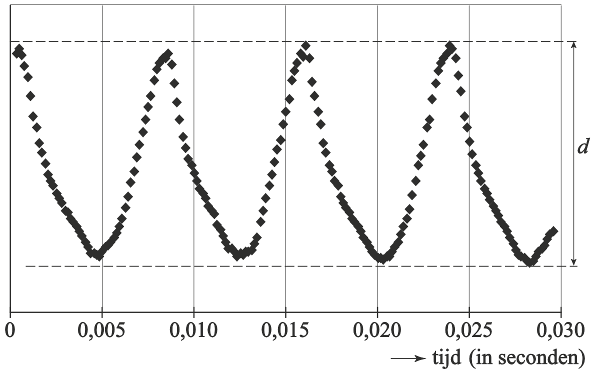
30 Laat zien hoe deze formule ontstaat uit de formule van Strouhal.

Een tuimelaar moeder en kind zwemmen naast elkaar met een snelheid van 15 meter per seconde.
Het kind maakt drie keer zoveel slagen als de moeder.

31 Hoe verhouden zich de lengte van de staartvin van de moeder en de lengte van de staartvin van het kind? Licht je antwoord toe en gebruik daarbij de formule.

De gewone huisvlieg is ook onderzocht. De slaggrootte van de huisvlieg is kleiner dan die van de vleermuis (zie figuur 6). De punten in figuur 6 geven de hoogte aan van het uiteinde van de vleugels van de vlieg tijdens de vlucht.
In figuur 6 is ruim $3\frac{1}{2}$ slag te zien. Als je weet hoe lang één slag duurt, kun je natuurlijk uitrekenen hoeveel slagen er in één seconde passen en heb je precies de slagfrequentie gevonden.

figuur 6

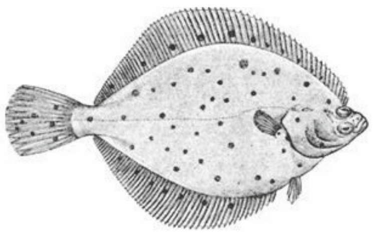


Verder is gegeven dat de slaggrootte van een huisvlieg 6,5 mm is.

32 Bereken de kruissnelheid van de huisvlieg.
Licht je antwoord toe. Geef je antwoord in twee decimalen nauwkeurig.

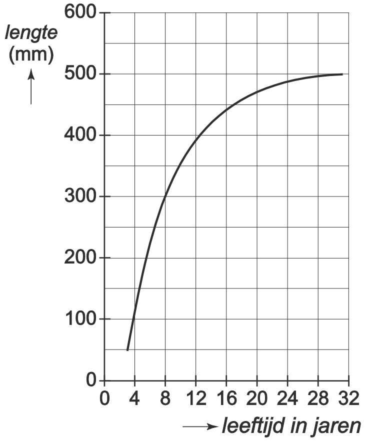
Platvissen

Er bestaan diverse soorten platvissen, bijvoorbeeld schollen en tongen. In de afbeelding hiernaast zie je een schol.
In de Beringzee is het onderzoekers van het Alaska Fisheries Science Center gelukt de groei en ontwikkeling van vrouwelijke schollen over een lange periode te volgen. Deze schollen kunnen maar liefst 30 jaar oud worden.

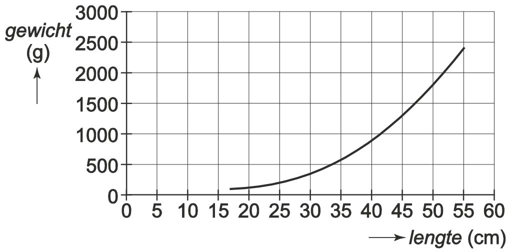


Hieronder staan twee grafieken met informatie over deze schollen.
In figuur 7 zie je het verband tussen de leeftijd en de lengte.
In figuur 8 zie je het verband tussen de lengte en het gewicht.

figuur 7



figuur 8



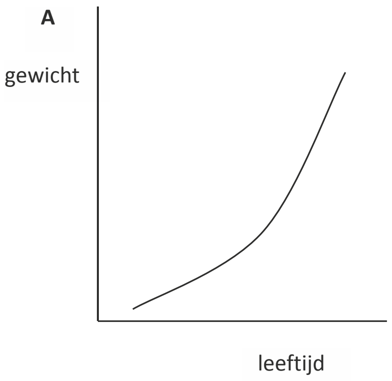
Door deze grafieken te combineren, is te achterhalen wat het gewicht is van een vrouwtjesschol als je de leeftijd kent.

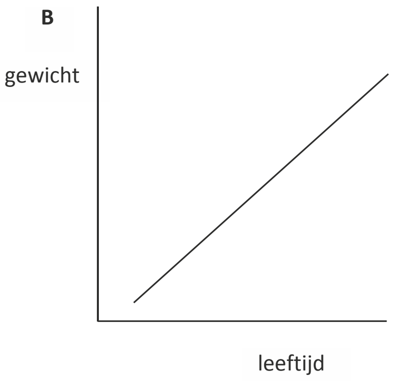
33 Wat is het gewicht van een vrouwtjesschol van 14 jaar oud? Licht je antwoord toe met behulp van de grafieken.

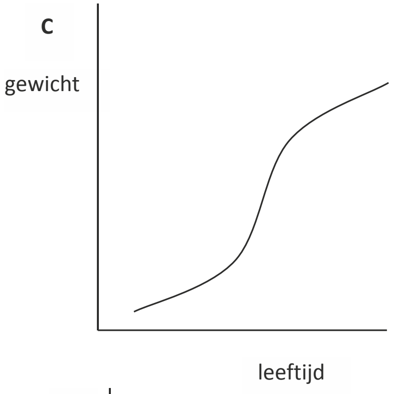
© ThiemeMeulenhoff

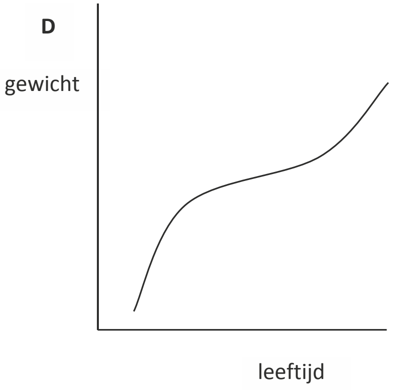
Uit beide grafieken kun je afleiden dat het gewicht van een vrouwtjesschol toeneemt, wanneer de vis ouder wordt. Hieronder staan vijf verschillende schetsen die een mogelijk verband tussen de leeftijd en het gewicht weergeven.

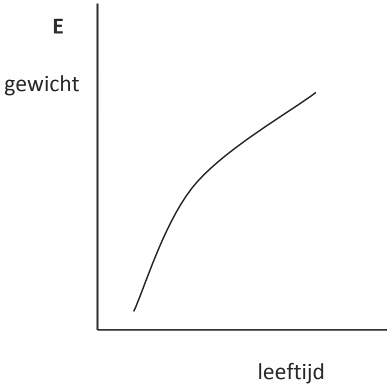
34 Onderzoek welk van deze schetsen het best past bij voorgaande figuren 7 en 8.









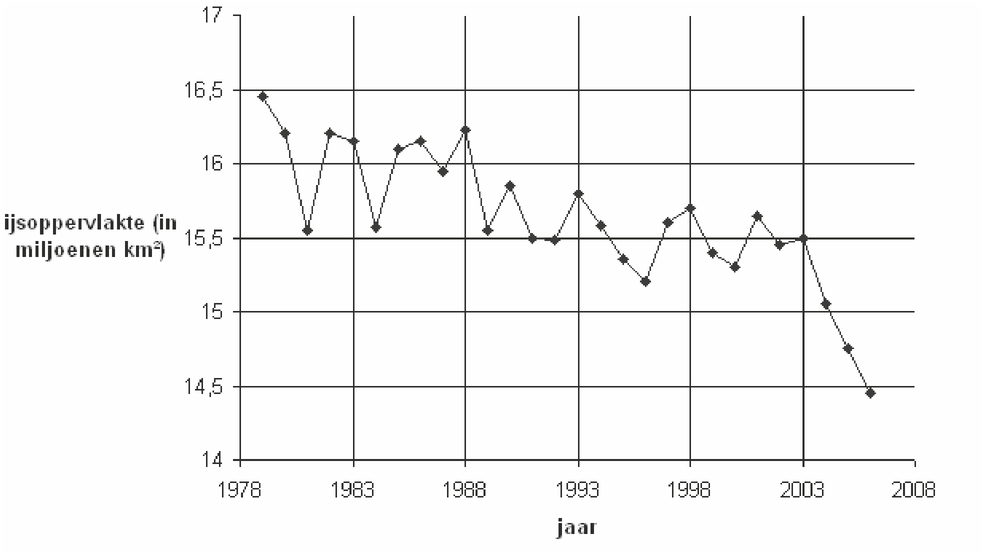


© ThiemeMeulenhoff

Noordpoolijs

Op de website van het National Snow and Ice Data Centre staat de volgende (vertaalde) tekst:

De oppervlakte van de ijskap van de Noordpool neemt in de afgelopen jaren duidelijk af. Nieuwe satellietgegevens van NASA en het Amerikaanse National Snow and Ice Data Centre laten zien dat de ijskap niet alleen in de zomer steeds kleiner wordt, maar dat ook de oppervlakte van het Noordpoolijs in de winter sinds de zeventiger jaren van de vorige eeuw, duidelijk terugloopt.



In bovenstaande grafiek is het verloop van het totale ijsoppervlak (in miljoenen km^2) van de Noordpool in de winter zichtbaar.

Afgaande op deze gegevens schrijft een journalist een artikel. Hij wil graag een dramatische kop en bedenkt de volgende zin als kop voor dat artikel:

NOORDPOOLIJS NEEMT MET ...% AF!

35 Wat is het meest dramatische percentage dat hij op basis van deze gegevens in de kop kan opnemen? Vermeld je bijbehorende berekening.

36 Bereken de gemiddelde jaarlijkse afname (in miljoenen km^2) van het ijsoppervlak op de Noordpool in de winter in de jaren 1979 – 2006.

Er zijn mensen die vinden dat het National Snow and Ice Data Centre de waarschuwingen overdrijft dat al het ijs aan het smelten is. Zij gebruiken bijvoorbeeld de gegevens van 1990 tot 2003.

37 Waarom zullen deze mensen dit deel van de grafiek gebruiken?

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 2

1 De tijd tussen twee waarnemingen is altijd 1 uur. Als de registratiefrequentie 2 is dan betekent dit dat de auto twee keer achter elkaar waargenomen is. Stel dat de auto om 10.30 en om 11.30 uur is waargenomen, bedenk dan wat de werkelijke parkeerduur op zijn hoogst is.

2 Maak gebruik van het aantal auto’s en de geschatte parkeerduur (zie tabel).

3 Er zijn meerdere redenen mogelijk. Bedenk bijvoorbeeld dat er auto’s 10 minuten parkeren zonder geregistreerd te worden. Wat gebeurt er dan met het gemiddelde?

4 Lees de tekst eerst heel goed door. Wat gebeurt er met het voorstel als het aantal voorstemmers kleiner is dan het aantal tegenstemmers. Er zijn twee tabellen waar je gegevens uit kunt gebruiken.

5 Om het voorstel aangenomen te krijgen moet de totale oppervlakte van de voorstemmers groter zijn dan dat van de tegenstemmers.

6 Lees de tekst heel goed en maak gebruik van de tabel en het diagram.

7 Het gaat nu om een weg met drie rijstroken van elk 2,70 meter breed. In de tabellen lees je de praktische capaciteit, het correctiepercentage het correctiepercentage voor vrachtverkeer af. Combineer deze gegevens.

8 Bedenk welke gegevens bekend zijn en welk gegeven onbekend is. Ga aan het werk zoals bij het vorige onderdeel.

9 Maak gebruik van de tabel om bijvoorbeeld eerst alle niet interlokale ritten op te tellen.

10 Bedenk welke ritten van de tabel over brug D gaan. Tel al deze ritten op.

11 Bepaal het aantal autoritten via de westkant, de oostkant en de zuidkant. Bedenk via welke wegen deze kanten te bereiken zijn en gebruik dan de tabel.

12 Maak gebruik van de tabel en combineer dit met het aantal liter in een volle tank.

13 De afgelegde weg is 300 km. Maak gebruik van de tweede tabel om het aantal gebruikte liter te berekenen.

14 Bedenk dat tussen 0 en 500 meter 12% met de trein reist. De grafiek bestaat uit allemaal horizontale lijnstukken.

15 Volg het schema zoals in het voorbeeld bij de opgave.

16 Bereken eerst zoals in het voorbeeld het geluidsniveau van twee machines van 44 dB. Het antwoord is 47 dB. Bedenk hoe je dit ook direct met behulp van opgave 19 had kunnen bepalen. Vervolgens bereken je het geluidsniveau van twee machines (44 dB en 47 dB).

17 Maak een slimme combinatie om aan 10 machines te komen met behulp van de tabel, zodat het rekenwerk beperkt is.

18 Bedenk bij welke temperatuur je geen correctie hoeft toe te passen (zie de grafiek).

19 Bij welke bedekking hoort half bewolkt? De bedekkingsgraad wordt gegeven in achtsten.

20 Bepaal wat het laagste waarderingscijfer is bij deze gegevens. Hoe groot moet dan het correctiecijfer zijn?

21 Welke factor heeft dan bijna geen invloed op het waarderingscijfer?

22 Bij welke temperatuur is de hagedis buiten zijn hol? Gebruik deze gegevens in de grafiek.

© ThiemeMeulenhoff

23 Lees de temperatuur af uit de grafiek om 6 uur en om 11 uur en bepaal hiermee de gemiddelde temperatuurstijging.

24 Er worden twee verschillen gevraagd over binnen en buiten het hol: 1. temperatuurschommeling (denk hierbij aan verschil tussen de maximum- en minimumtemperatuur); 2. het tijdstip van de maximale temperatuur.

25 Gebruik als hulpmiddel bijvoorbeeld een liniaal en verschuif deze evenwijdig aan de stippellijnen in de figuur. Bedenk bij welke kleuren de hagedis buiten zijn hol kan zijn.

26 Bepaal eerst de temperatuur op de tijdstippen waar de hagedis wisselt van buiten zijn hol naar in zijn hol. Bedenk daarna hoe hoog de temperatuur kan zijn tussen deze tijdstippen.

27 Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden. d en v zijn bekend.

28 Gebruik het antwoord van het vorige onderdeel.

29 Recht evenredig: formule is van de vorm $y = ax$ of $\frac{y}{x} = a$.
Omgekeerd evenredig: formule is van de vorm $y \cdot x = a$ of $y = \frac{a}{x}$

30 Gebruik de formule van Strouhal en de kruissnelheid $v = 15$ m/s

31 Het kind maakt drie keer zo veel slagen als de moeder. Gebruik dit verband en de formule $f = \frac{4{,}5}{d}$

32 Gebruik de grafiek.

33 Gebruik de eerste figuur om de lengte af te lezen van een vrouwtje van 14 jaar. Gebruik de uitkomst om in de tweede figuur het gewicht te bepalen.

34 Bepaal eerst met behulp van de grafieken voor een aantal waarden van de leeftijd de lengte en het gewicht.

35 Kijk in de grafiek naar de grootste en kleinste waarde van het ijsoppervlakte en bereken de procentuele afname.

36 Bereken de gemiddelde afname per jaar.

37 Bekijk alleen het stuk grafiek tussen 1990 en 2003, wat valt je op?

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 2

Parkeeronderzoek

Het parkeerterrein gaat open om 8.30 uur en sluit om 18.30 uur.
De eerste waarneming is om 9.30, de tweede waarneming om 10.30 etc. t/m 17.30. Totaal zijn er 9 waarnemingen op een dag.

1 Bij een registratiefrequentie 2 is een auto precies twee maal achter elkaar geregistreerd. Bijvoorbeeld om 9.30 uur en 10.30 uur. De auto heeft dan maximaal van 8.30 uur tot 11.30 uur kunnen parkeren dus de maximale parkeerduur is 3 uur.
Bijvoorbeeld bij een registratie om 12.30 uur en 13.30 uur heeft een auto maximaal van net na 11.30 uur tot 14.30 kunnen parkeren, dus ook maximaal bijna 3 uur.
Bij een registratiefrequentie 2 heeft een auto dus maximaal bijna 3 uur op het parkeerterrein kunnen staan.

2 5247 auto's hebben een geschatte parkeerduur van 60 minuten, dus totaal hebben deze auto's samen $5247 \cdot 60 = 314\,820$ uur geparkeerd.
De totale parkeerduur van alle auto's samen is:
$5247 \cdot 60 + 1804 \cdot 120 + 753 \cdot 180 + 359 \cdot 240 + 287 \cdot 300 + 443 \cdot 360 + 290 \cdot 420 + 165 \cdot 480 + 115 \cdot 540 = 1\,261\,680$ uur
De gemiddelde parkeerduur per auto $= \frac{1\,261\,680}{9\,463} = 133{,}3277$ minuten.
Dit is afgerond 133 minuten.

3 De auto's die bijv. parkeren van 8.40 tot 9.00 uur of van 10.45 tot 11.00 uur worden niet geregistreerd. En zo zijn er veel voorbeelden te noemen.
Als men de auto's met een korte parkeertijd ook mee zou rekenen voor het gemiddelde dan komt het gemiddelde lager uit.
Als er bijvoorbeeld 1200 auto's die 10 minuten parkeren bij bovenstaande tabel gezet zouden worden dat wordt het gemiddelde kleiner.
1200 auto's · 10 minuten geeft een totale parkeertijd van 12 000 minuten.
Het gemiddelde wordt dan $\frac{1\,261\,680 + 12\,000}{9\,463 + 1200} = \frac{1\,273\,680}{10\,663} = 119$ minuten.

Ruilverkaveling

4 Aantal voorstemmers = 5 + 50 + 22 + 3 = 80.
Aantal tegenstemmers = 120.
Er zijn minder voorstemmers dan tegenstemmers dus de stembriefjes moeten nu opnieuw bekeken worden naar oppervlakte.
Combineer tabel 2 en tabel 3:
Totale oppervlakte voorstemmers $= 5 \cdot 2 + 50 \cdot 12 + 22 \cdot 30 + 3 \cdot 90 = 1540$ ha.
Totale oppervlakte tegenstemmers $= 60 \cdot 2 + 45 \cdot 12 + 15 \cdot 30 + 0 \cdot 90 = 1110$ ha.
De totale oppervlakte van de voorstemmers is groter. Het voorstel voor ruilverkaveling wordt dus aangenomen.

5 *Om het voorstel aangenomen te krijgen moet de totale oppervlakte van de voorstemmers groter zijn dan dat van de tegenstemmers.*
De totale grondoppervlakte is $65 \cdot 2 + 95 \cdot 12 + 37 \cdot 30 + 3 \cdot 90 = 2650$ ha.
(kan ook berekend worden met het antwoord uit de vorige opgave: 1540 + 1110 = 2650 ha).
Zodra meer dan 1325 ha van de bedrijven van de voorstemmers komt, wordt het voorstel aangenomen.
Voor het kleinste aantal voorstemmers moeten de voorstemmers uit de grootste bedrijven komen.
3 personen met kleurcode groen geeft $3 \cdot 90 = 270$ ha.

© ThiemeMeulenhoff

Uit kleurcode blauw heeft men nog iets meer dan 1325 – 270 = 1055 ha nodig.
Per persoon heeft men met kleurcode blauw 30 ha.

Om 1055 ha te krijgen heeft men $\frac{1055}{30}$ = 35,2 = 36 personen nodig.

Het kleinste aantal voorstemmers is 3 + 36 = 39.

Praktische capaciteit van een weg

6 *Om deze vraag goed te kunnen beantwoorden, moet je de tekst bij de opgave goed lezen en de tabel en het histogram gebruiken.*
Het gaat in deze vraag om een autoweg met 4 rijstroken met middenberm.
De praktische capaciteit in voertuigen per uur is 4000 (tabel 4).
De verkeersdrukte is maximaal tussen 17.00 en 18.00 uur: namelijk 9% van de totale verkeersdrukte op een dag (zie figuur: langste staaf in het histogram).
Om de praktische capaciteit geen enkel uur te overschrijden mag 9% niet meer zijn dan 4000 voertuigen.
Combineren we deze gegevens dan geldt: 9% is maximaal 4000 dus

100% (totaal per dag) = $\frac{4000}{9} \cdot 100$ = 44 444 voertuigen.

of met een kruistabel

4000	...
9%	100%

$\frac{4000 \cdot 100}{9}$ = 44 444

7 *Let op: het gaat hier om een weg met drie rijstroken van elk 2,70 meter breed.*
Praktische capaciteit in voertuigen per uur is 1500.
Vrachtverkeer vormt 20% van het totale verkeer dus voor een meerstrooksweg is het correctiepercentage 83%.
Rijstrookbreedte is 2,70 meter en een meerstrooksweg dus correctiepercentage is 81%.
Combineren we bovenstaande drie gegevens dan geldt:
praktische capaciteit van deze weg = 1500 · 0,83 · 0,81 = 1008.

8 Praktische capaciteit in voertuigen per uur van twee rijstroken = 900.
Vrachtverkeer vormt 20% van het totale verkeer dus bij een tweestrooksweg is het correctiepercentage 78%.
Rijstrookbreedte is nog onbekend en het is een tweestrooksweg.
Praktische capaciteit van deze weg = 900 · 0,78 · ? (afhankelijk van rijstrookbreedte).

eerste manier, correctiepercentages uit de tabel invullen:

rijstrookbreedte	correctiepercentage	praktische capaciteit
3,00 m	77%	900 · 0,78 · 0,77 = 540
3,30 m	86%	900 · 0,78 · 0,86 = 603
3,60 m	100%	900 · 0,78 · 1,00 = 702

De minimale rijstrookbreedte die nodig is om de praktische capaciteit van minstens 600 te bereiken is 3,30 meter.

tweede manier met een formule:
Noem het correctiepercentage bij de rijstrookbreedte *b*.
Los op: praktische capaciteit van deze weg = 900 · 0,78 · *b* > 600.

$702 \cdot b > 600$ dus $b > \frac{600}{702}$ dus $b > 0{,}855$ (85,5%).

86% klopt, dit is het eerste grotere getal in de tabel;
de minimale rijstrookbreedte = 3,30 m.

© ThiemeMeulenhoff

Autoverkeer

9 *In de tabel is het handiger om eerst alle niet interlokale autoritten op te tellen.*
Dit zijn de autoritten van Z naar Z, van Z naar M, van Z naar N etc. (links boven in de tabel).
Totaal zijn dit er 333 + 155 + 107 + 140 + 109 + 114 + 111 + 112 + 176 = 1357.
Het totale aantal autoritten is 3747.
Het aantal interlokale autoritten is 3747 – 1357 = 2390.
$\frac{2390}{3747}$ = 0,64 (64%) deel is interlokaal, dit is bijna $\frac{2}{3}$ = 0,67^e deel.

10 Uit de tabel volgt

		naar			
		N	2	3	4
	N		106		
van	2	132		17	116
	3		26		
	4		56		

Er gaan totaal 106 + 132 + 17 + 116 + 26 + 56 = 453 autoritten over D.

11 De zuidkant is alleen via 1 te bereiken.
Van 1 naar … gaan totaal 586 autoritten (zie tabel bij totaal).
Van … naar 1 gaan totaal 457 autoritten.
Totaal zijn er 457 + 586 – 33* = 1010 autoritten via de zuidkant.
De 33 autoritten van 1 naar 1 zijn meegeteld bij de 586 autoritten en bij de 457 autoritten, deze moeten we er één keer afhalen (zie het grijze deel in de tabel).

tabel 7

		naar								
		Z	M	N	1	2	3	4	5	totaal
	Z	333	155	107	216	44	25	50	41	971
	M	140	109	114	86	59	20	32	27	587
	N	111	112	176	62	106	31	43	25	666
van	1	280	96	98	33*	17	7	18	37	586
	2	42	101	132	17	8	17	116	7	440
	3	26	22	36	11	26	1	22	1	145
	4	37	25	38	13	56	17	2	4	192
	5	48	32	28	19	24	3	5	1	160
	totaal	1017	652	729	457	340	121	288	143	3747

De oostkant is te bereiken via 4 en 5.
Van 4 naar … gaan totaal 192 en naar 4 gaan totaal 288 autoritten.
Totaal via 4 gaan er 192 + 288 – 2 = 478 autoritten.
Van 5 naar … gaan totaal 160 en naar 5 gaan totaal 143 autoritten.
Totaal via 5 gaan er 160 + 143 – 1 = 302 autoritten.
Het totaal aantal autoritten via de oostkant is 302 + 478 = 780.

© ThiemeMeulenhoff

De westkant kan men bereiken via 2 en 3.
Van 2 naar … gaan totaal 440 en naar 2 gaan totaal 340 autoritten.
Totaal via 2 gaan er 440 + 340 – 8 = 772 autoritten.
Van 3 naar … gaan totaal 145 en naar 3 gaan totaal 121 autoritten.
Totaal via 3 gaan er 145 + 121 – 1 = 265 autoritten.
Het totaal aantal autoritten via de westkant is 772 + 265 = 1037.
Conclusie: de autostroom is het grootst aan de westkant.

Zuinig rijden

12 Een volle tank is 35 liter.
In de vijfde versnelling kun je met 1 liter 21,68 km afleggen, dus met 35 liter is dit 35 · 21,68 = 758,8 km.
In de vierde versnelling kun je met 1 liter 19,63 km afleggen, dus met 35 liter is dit 35 · 19,63 = 687,05 km.
758,8 – 687,05 = 71,75 km.
Conclusie: in de vijfde versnelling kun je ongeveer 72 km meer afleggen met een volle tank.

13 De afgelegde afstand is 300 km.
Met 80 km/uur kun je per liter 21,68 km afleggen, dus bij 300 km gebruik je

$\frac{300}{21,68} \approx 13,84$ liter

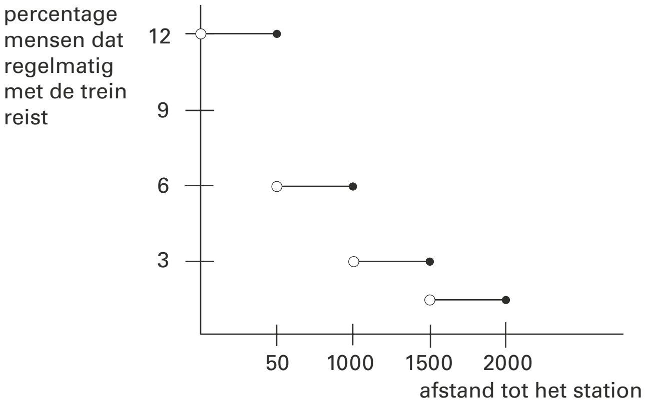
Met 60 km/uur kun je per liter 25,35 km afleggen, dus bij 300 km gebruik je

$\frac{300}{25,35} \approx 11,83$ liter

13,84 – 11,83 ≈ 2 liter
Conclusie: je gebruikt ongeveer 2 liter meer.

Nederlandse Spoorwegen

14 *Let op dat dit een getrapte grafiek is.*
Tussen 0 en 500 m blijft het percentage 12%.
Tussen 500 en 1000 m blijft het percentage 6%, etc.



Lawaai en machines

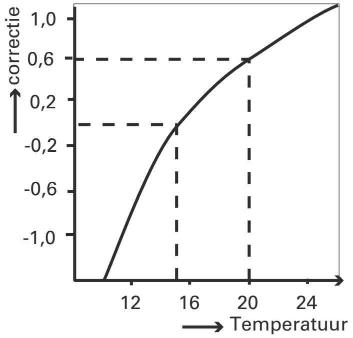
15 *Volg het schema zoals in het voorbeeld bij de opgave.*
1 geluidsniveau machine 1: x dB en geluidsniveau machine 2: x dB
2 verschil: 0,0 dB
3 pluswaarde: 3,0 (aflezen in figuur)
4 totale geluidswaarde: $x + 3$ dB

16 2 machines van 44 dB geven hetzelfde geluidsniveau als één machine van 47 dB.
1 geluidsniveau machine 1: 44 dB
geluidsniveau machine 2: 44 dB
2 verschil: 0,0 dB
3 pluswaarde: 3,0 (zie figuur)
4 totale geluidswaarde: 44 + 3 = 47 dB (of direct uit de vorige opgave)
Beschouw nu de 3 machines als één machine van 47 dB en één van 44 dB.
1 geluidsniveau machine 1: 47 dB
geluidsniveau machine 2: 44 dB
2 verschil: 3,0 dB
3 pluswaarde: 1,7 (zie figuur)
4 totale geluidswaarde: 47 + 1,7 = 48,7 dB

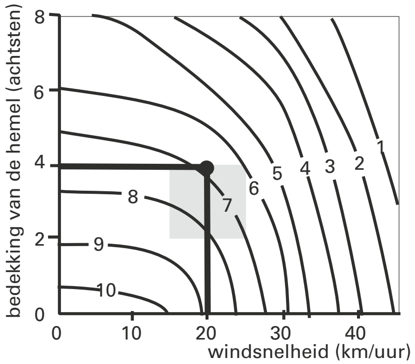
17 *Gebruik een combinatie van de aantallen machines uit de tabel om aan de gevraagde aantallen te komen.*
Geluidsniveau van 10 machines = geluidsniveau van 5 + 5 machines.
1 geluidsniveau machine 1: 51 dB (totale geluidsniveau van 5 machines)
geluidsniveau machine 2: 51 dB
2 verschil: 0,0 dB
3 pluswaarde: 3 (zie figuur)
4 totale geluidswaarde: 51 + 3 = 54 dB
17 machines kun je krijgen door bijv. de geluidsniveaus van 8 + 8 + 1 machines te berekenen.
Eerst 8 + 8 machines geeft 56 dB want:
1 geluidsniveau machine 1: 53 dB (totaal van 8 machines)
geluidsniveau machine 2: 53 dB
2 verschil: 0,0 dB
3 pluswaarde: 3 (zie figuur)
4 totale geluidswaarde: 53 + 3 = 56 dB (of direct uit de eerste opgave)
17 machines = 16 machines (56 dB) + 1 machine (44 dB) geeft
1 geluidsniveau machine 1: 56 dB
geluidsniveau machine 2: 44 dB
2 verschil: 12,0 dB
3 pluswaarde: 0,2 (zie figuur 1)
4 totale geluidswaarde: 56 + 0,2 = 56,2 dB
17 machines kun je ook krijgen door bijvoorbeeld de geluidsniveaus van 4 + 5 + 8 machines te berekenen, ga dit zelf na. Je krijgt dezelfde uitkomst.

Weerbeleving

18 Bij 15 °C.
Dit kun je aflezen in de grafiek hiernaast.
Trek bij een correctie = 0 op de verticale as een horizontale lijn naar de grafiek. De temperatuur die hier bij hoort is 15 °C.
De waarderingscijfers uit het diagram horen bij een temperatuur van 15 °C.



19 Half bewolkt wil zeggen de bedekking van de hemel is 4.
Een windsnelheid van 20 km/uur en een bedekking 4 geeft bij een temperatuur van 15 °C een waarderingscijfer van iets minder dan 7 (zie dikke stip in figuur).
Bij 20 °C past men een correctie toe van + 0,6 op het waarderingscijfer uit het diagram.
Het waarderingscijfer wordt dan iets minder dan 7,0 + 0,6 = 7,6.
Dit is hoger dan 7 dus er is sprake van een recreatiedag.



20 Windsnelheid 15 km/uur tot 25 km/uur en bedekking van de hemel van 2 tot 4 geeft het grijze gebied in de figuur bij de vorige opgave.
Het laagste waarderingscijfer in dit gebied is bij windsnelheid = 25 km/uur en bedekking = 4. Bij een temperatuur van 15 °C is dit waarderingscijfer 6.
Om zeker te zijn van een waarderingscijfer van 7 of hoger (recreatiedag), moet er een correctie van minimaal + 1 plaatsvinden. Dit is zo bij een temperatuur van 24 °C of hoger.

21 Bij weinig of geen bewolking (bedekking klein) heeft een toename van de windsnelheid van 0 tot ongeveer 15 km/uur geen invloed op het waarderingscijfer.

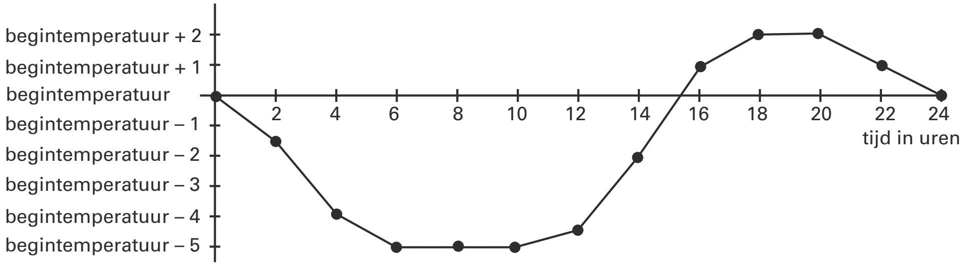
Woestijnhagedis

22 Bij een temperatuur tussen de 38 °C en de 43 °C is de hagedis buiten zijn hol actief. Dit is het gebied tussen de stippellijnen in de figuur. Lees uit de grafiek af dat de hagedis actief is tussen ongeveer 7.30 uur en 8.00 uur 's morgens en 18.00 uur en 18.30 uur. Totaal is de hagedis ongeveer 1 uur actief buiten zijn hol.

23 Temperatuur om 6 uur 's morgens is 21 °C, de temperatuur om 11 uur is 61 °C.
In 5 uur tijd is de temperatuur 40 °C gestegen.
De gemiddelde stijging per uur = $\frac{40}{5}$ = 8 °C.

© ThiemeMeulenhoff

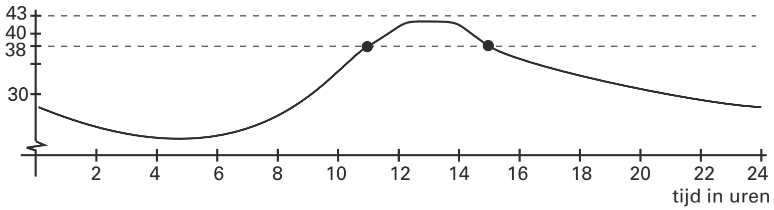
24 *De verschillen wat betreft temperatuurschommeling en tijdstip van maximale temperatuur zijn goed te zien als we een globale grafiek van de temperatuur in het hol tekenen. Op de verticale as staat de temperatuur ten opzichte van de begintemperatuur in het hol op t = 0. Gebruik figuur van het temperatuurverloop in het hol om de volgende grafiek te schetsen.*



verschil 1
De temperatuurschommeling van de buitentemperatuur is groter dan de temperatuurschommeling in het hol. Het verschil tussen de maximale en minimale buitentemperatuur = 64 – 21 = 43 °C.
Het verschil tussen de maximale en minimale binnentemperatuur = 7 °C.
Van de begintemperatuur gaat totaal maximaal 1,5 + 2,5 + 1 = 5 °C af en komt er daarna vanaf het laagste punt 0,5 + 2,5 + 3 + 1 = 7 °C bij. In de grafiek is dit goed te zien.
verschil 2
De maximale buitentemperatuur is ongeveer om 13.00 uur.
De maximale binnentemperatuur is later, ongeveer om 18.00 uur.

25 *Leg je liniaal op figuur "maand van het jaar" en trek denkbeeldige lijnen evenwijdig aan de stippellijnen in figuur (horizontale doorsneden). Laat je liniaal evenwijdig aan de gestippelde lijnen van boven naar beneden zakken en meet steeds het stukje wit + lichtgrijs op. Dit is het stuk waar de hagedis buiten zijn hol kan zijn.*
In januari en februari is de hagedis nooit uit zijn hol, eind maart maximaal 5,5 uur, halverwege mei is dit ongeveer 8 uur, etc.
In de maand mei is het witte + lichtgrijze deel het grootst.

26 *Lees uit figuur "maand van het jaar" bij de stippellijn van 15 maart de gegevens af.*
Van 11 t/m 15 uur heeft de hagedis geen beschutting nodig, dus de temperatuur ligt dan tussen de 38 °C en 43 °C.
Van 0 t/m 11 uur en van 15 t/m 24 uur is de hagedis voortdurend in zijn hol, dus de temperatuur ligt onder de 38 °C.
Teken de grafiek in ieder geval door (11, 38) en (15, 38).
Op tijdstip t = 0 en t = 24 is het ongeveer dezelfde temperatuur (begin en eindpunt liggen ongeveer even hoog).



© ThiemeMeulenhoff

Vliegen en zwemmen

27 De kolibrie heeft een slaggrootte van 8 cm dus $d = 0{,}08$ m en de kruissnelheid $v = 13{,}5$ m/s.

$\frac{f \cdot d}{v} = \frac{f \cdot 0{,}08}{13{,}5} = \frac{0{,}08 \cdot f}{13{,}5} = 0{,}3$ dus $\frac{0{,}08 \cdot f}{13{,}5} = \frac{0{,}3}{1}$ kruislings vermenigvuldigen geeft

$0{,}08 \cdot f = 13{,}5 \cdot 0{,}3 = 4{,}05$ dus $f = \frac{4{,}05}{0{,}08} = 50{,}625$ dus ruim 50 slagen per seconde.

De vergelijking mag ook met de grafische rekenmachine worden opgelost, bijvoorbeeld met intersect.

28 *Het antwoord uit het vorige onderdeel mag gebruikt worden.*

De slagfrequentie is 50 slagen per seconde. Dus 1 slag duurt $\frac{1}{50} = 0{,}02$ seconde.

of

Gebruik het niet afgeronde antwoord uit het vorige onderdeel.

De slagfrequentie is 50,625 slagen per seconde. Dus 1 slag duurt $\frac{1}{50{,}625} = 0{,}01975...$ seconde, dus afgerond op twee decimalen is dit ook 0,02 seconde.

29 *Omgekeerd evenredig is een formule van de vorm $y \cdot x = a$ of $y = \frac{a}{x}$*

Recht evenredig is een formule van de vorm $y = ax$ of $\frac{y}{x} = a$

$\frac{f \cdot 0{,}26}{v} = 0{,}3$ is te herschrijven tot $f \cdot 0{,}26 = 0{,}3 \cdot v$ dus $f = \frac{0{,}3}{0{,}26} v = 1{,}15 \cdot v$. Dit is een recht evenredig verband.

of

$\frac{f \cdot 0{,}26}{v} = 0{,}3$ dus $\frac{f}{v} = \frac{0{,}3}{0{,}26} = 1{,}15$. Dit is een recht evenredig verband (een rechte lijn door de oorsprong).

30 *Gebruik de formule van Strouhal en de kruissnelheid $v = 15$ m/s.*

$\frac{f \cdot d}{v} = 0{,}3$ en $v = 15$ levert $\frac{f \cdot d}{15} = 0{,}3$ dus $\frac{f \cdot d}{15} = \frac{0{,}3}{1}$, kruislings vermenigvuldigen

dus $f \cdot d = 0{,}3 \cdot 15 = 4{,}5$ dus $f = \frac{4{,}5}{d}$

Deze formule mag in het volgende onderdeel gebruikt worden.

31 *Gebruik de formule van Strouhal uit de vorige opgave, noem het aantal slagen per seconde van de moeder f_{moeder}. Bedenk wat het aantal slagen van het kind dan is.*

$v = 15$ dus geldt $f = \frac{4{,}5}{d}$ (zie opgave 30), dus $f \cdot d = 4{,}5$

Er geldt f_{moeder} = aantal slagen van de moeder.

Het kind maakt drie maal zoveel slagen, dus $f_{kind} = 3 \cdot f_{moeder}$ = aantal slagen van het kind.

Moeder: $f_{moeder} \cdot d_{moeder} = 4{,}5$

Kind $f_{kind} \cdot d_{kind} = 4{,}5$ en $f_{kind} = 3 \cdot f_{moeder}$ dus $3 \cdot f_{moeder} \cdot d_{kind} = 4{,}5$

$3 \cdot f_{moeder} \cdot d_{kind} = 4{,}5$ dus $f_{moeder} \cdot 3 \cdot d_{kind} = 4{,}5$ en ook geldt $f_{moeder} \cdot d_{moeder} = 4{,}5$

Dus $3 \cdot d_{kind} = d_{moeder}$ dus verhouding $= d_{kind} : d_{moeder} = 1 : 3$.

Dus de slaggrootte van de moeder is 3 keer zo groot als die van het kind.

32 *Gebruik de grafiek om de slagfrequentie te berekenen.*

Uit de grafiek volgt: 1 slag duurt ongeveer 0,008 seconden.

In één seconde gaan dus $\frac{1}{0{,}008} = 125$ slagen.

Dus $f = 125$.

De slaggrootte is 6,5 mm dus $d = 0{,}0065$ m.

Invullen in $\frac{f \cdot d}{v} = 0{,}3$ levert $\frac{125 \cdot 0{,}0065}{v} = 0{,}3$, dus $\frac{0{,}8125}{v} = \frac{0{,}3}{1}$, dus $0{,}3v = 0{,}8125$

dus $v = \frac{0{,}8125}{0{,}3} = 2{,}708$. Afgerond is dit 2,71 m/s.

Er staat bereken, dus je mag ook de grafische rekenmachine gebruiken om de vergelijking op te lossen.

Platvissen

33 *Gebruik de eerste figuur om de lengte af te lezen van een vrouwtje van 14 jaar. Gebruik de uitkomst om in de tweede figuur het gewicht te bepalen.*

Bij een leeftijd van 14 jaar hoort een lengte van ongeveer 420 mm.

Bij een lengte van 420 mm = 42 cm hoort een gewicht van ongeveer 1050 gram.

34 *Leeftijd wordt uitgezet tegen gewicht. Gebruik een tabel met waarden om een schets van de grafiek te maken.*

Als de leeftijd toeneemt dan is er een afnemende groei voor de lengte.

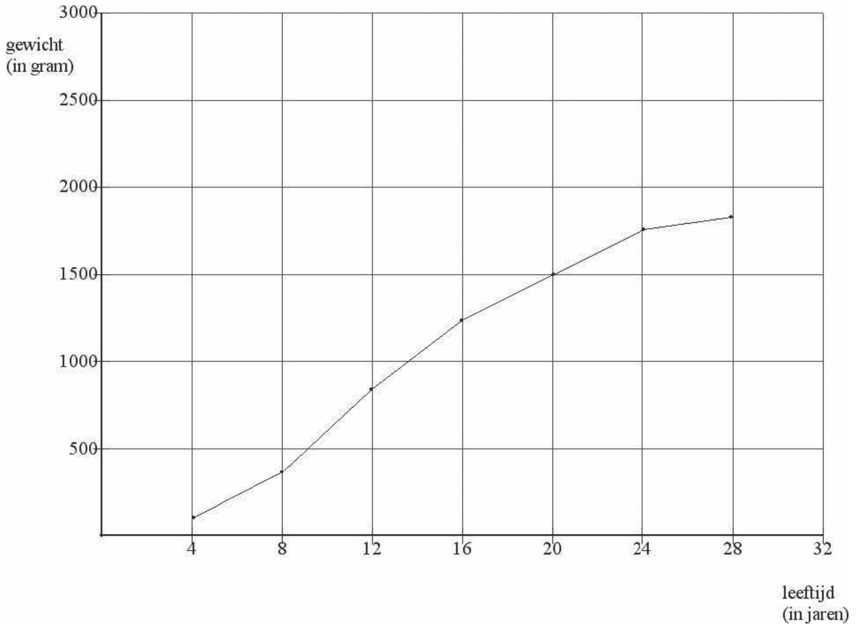
Bij een toename va de lengte is er een toenemende groei voor het gewicht.

Het is moeilijk om hier al een conclusie uit te trekken.

Waarden uit de grafieken aflezen:

leeftijd (in jaren)	4	8	12	16	20	24	28
lengte (in mm)	120	300	390	440	470	485	499
gewicht (in g)	100	350	800	1250	1500	1750	1800

Teken de grafiek met op de horizontale as leeftijd en op de verticale as gewicht.



De schets van de grafiek lijkt het meeste op C.

Noordpoolijs

35 *Kijk in de grafiek naar de grootste en naar de kleinste waarde van de ijsoppervlakte.*
In 1979 was de oppervlakte ongeveer 16,4 miljoen km^2.
In 2006 was de oppervlakte ongeveer 14,4 miljoen km^2.
De procentuele afname is dan $\frac{16{,}4 - 14{,}4}{16{,}4} \cdot 100\% = 12{,}2\%$.
Conclusie: in de kop staat 12,2% afname.

36 *Gemiddelde, dus bereken de gemiddelde afname van 1979 tot 2006.*
In 1979 was de oppervlakte ongeveer 16,4 miljoen km^2.
In 2006 was de oppervlakte ongeveer 14,4 miljoen km^2.
Dus de gemiddelde afname per jaar is $\frac{16{,}4 - 14{,}4}{2006 - 1979} = \frac{2}{27} = 0{,}074$ miljoen km^2 per jaar.

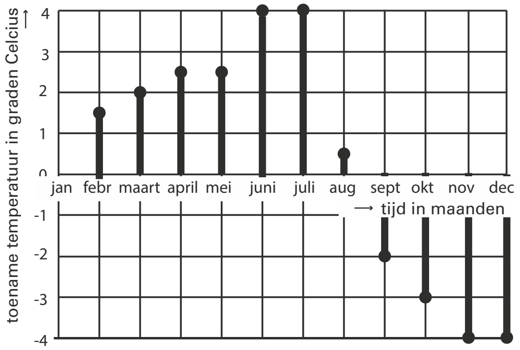
37 *Kijk alleen naar het deel van de grafiek vanaf 1990 tot 2003, wat valt je dan op?*
In 1990 is de ijsoppervlakte ongeveer 15,8 miljoen km^2.
In 2003 is de ijsoppervlakte ongeveer 15,5 miljoen km^2.
De ijsoppervlakte schommelt om de horizontale lijn 15,5 miljoen km^2, er is in deze periode geen dalende trend.

3 Veranderingen*

Temperatuurverloop

In onderstaand toenamediagram is de toename van de temperatuur weergegeven in Marrakesh van januari tot en met december 2015. In januari was de gemiddelde temperatuur 18 °Celsius.

Gemiddelde temperatuur in Marrakech



1 In welke achtereenvolgende maanden was er sprake van een toenemende stijging voor de gemiddelde temperatuur?

2 In welke maanden was er sprake van een afnemende stijging voor de gemiddelde temperatuur?

3 In welke maand wordt de hoogste gemiddelde temperatuur bereikt. Hoe veel graden zal deze temperatuur zijn?

Bevolkingsgroei

In de gemeente Avertem groeit de gemeente snel. Er zijn twee modellen in omloop waarmee men het aantal inwoners wil voorspellen. In onderstaande formules is t in jaren en t = 0 is 1-1-2016
Aantal inwoners A_1 volgens model 1 $A_1 = 504 \cdot t + 12\,600$
Aantal inwoners A_2 volgens model 2 $A_2 = 12\,600 \cdot 1{,}035^t$

4 In welke jaren zijn er volgens model 1 op 1 januari meer inwoners dan volgens model 2?

5 Hoeveel inwoners komen er per jaar volgens model 1 bij?

6 Hoeveel inwoners komen er gemiddeld per jaar bij volgens model 2 in de periode van 2020 tot 2030?

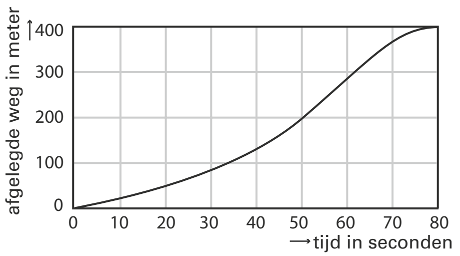
7 Hoeveel procent is de toename in 2030 volgens model 2 groter dan volgens model 1? Geef het antwoord in hele procenten nauwkeurig.

8 Van wat voor soort stijging is er sprake bij model 2?

* Deze stof wordt niet in het centraal examen gevraagd.

Afgelegde weg

Marc doet mee aan een hardloopwedstrijd over 400 meter. Het verloop van zijn race is in onderstaande grafiek weergegeven.



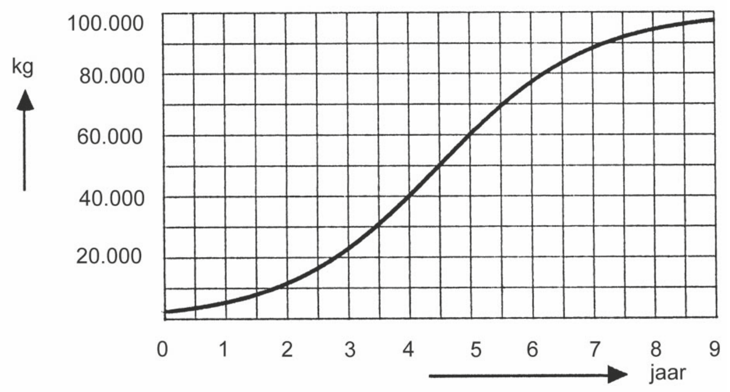
9 Wat is zijn gemiddelde snelheid over het hele traject? Geef het antwoord in km/uur.

10 Wat is zijn gemiddelde snelheid gedurende de eerste 10 seconden in m/sec?

11 Op welk tijdstip was zijn snelheid het grootste? Hoe kun je dit aan de grafiek zien? Maak een schatting van deze snelheid in meter/sec.

Viskwekerij

In een viskwekerij wordt vis uitgezet in een aantal nieuw aangelegde kweekvijvers. Als er geen vis wordt gevangen zal de visstand zich in de loop der jaren uitbreiden. Onderstaande grafiek geeft een model van de groei van de visstand.



12 Teken het toenamediagram voor intervallen van een jaar, te beginnen met het interval 1-2.

De viskweker zal een aantal jaren afwachten alvorens te 'oogsten'. Daarna wil hij jaarlijks dezelfde hoeveelheid vis vangen, liefst zoveel mogelijk. Het oogsten vindt steeds plaats aan het eind van het jaar. Na elke vangst breidt de visstand zich weer uit volgens bovenstaande grafiek.

13 Welk advies zou je de viskweker geven over:
- het aantal jaren dat hij na het uitzetten van de vis moet wachten;
- de grootte van de jaarlijkse vangst?

Geef bij dit advies een toelichting, waarmee je de viskweker denkt te overtuigen.

 © ThiemeMeulenhoff

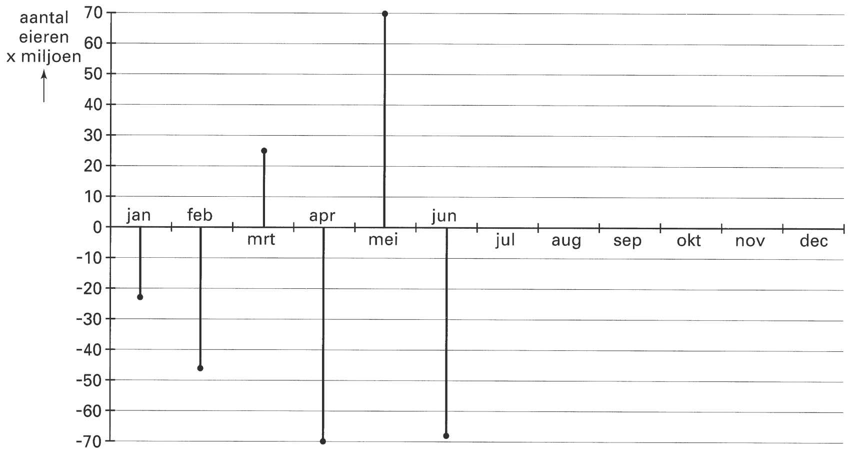
Eieren

De pluimveesector is voor Nederland een belangrijke bedrijfstak. Zo worden er bijvoorbeeld jaarlijks miljarden eieren geproduceerd. Een deel van die eieren gaat naar het buitenland.
In 2004 werden 5 457 377 000 eieren geëxporteerd met een totale waarde van € 517 846 000. In 2005 werden 5 354 488 000 eieren geëxporteerd met een totale waarde van € 685 357 000.

Hoewel het aantal geëxporteerde eieren afnam, nam de totale waarde toe.
14 Met hoeveel procent nam de gemiddelde prijs van een geëxporteerd ei toe? Licht je antwoord toe.

In Nederland worden de meeste eieren bij pakstations verpakt.
In 2005 werden in totaal 8231 miljoen eieren bij de pakstations aangevoerd, waarvan 730 miljoen in december.
Midden 2006 zijn de gegevens die op dat moment (juli 2006) bekend waren, verwerkt in een toenamediagram. Zie figuur op de volgende bladzijde. Telkens is de toe- of afname genoteerd ten opzichte van de maand daarvoor. Zo kun je aflezen dat in maart 2006 ongeveer 26 miljoen eieren meer bij de pakstations werden aangevoerd dan in februari 2006.

toenamediagram 2006



Uiteindelijk bleek dat in 2006 evenveel eieren bij de pakstations werden aangevoerd als in 2005.

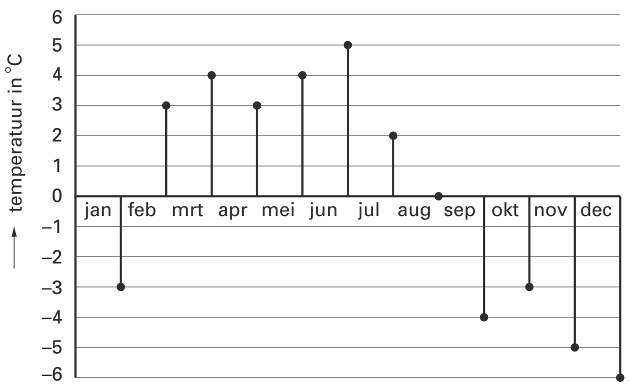
15 Hoeveel eieren zijn er in het tweede halfjaar van 2006 aangevoerd? Licht je antwoord toe.

© ThiemeMeulenhoff

Etmaaltemperatuur

Gedurende een kalenderjaar is in een zeker gebied elke maand de gemiddelde etmaaltemperatuur bepaald. Met behulp van de meetresultaten is in figuur 1 het toenamediagram van de gemiddelde etmaaltemperaturen getekend.

figuur 1



16 In welke maand was de verandering van de gemiddelde etmaaltemperatuur ten opzichte van de voorafgaande maand het grootst?

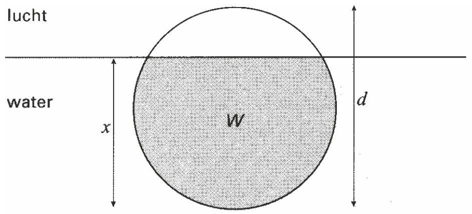
De gemiddelde etmaaltemperatuur in mei was 12 ºC.

17 Bereken de gemiddelde etmaaltemperatuur in de maand december.

Bal uit het water

Je hebt vast wel eens in het zwembad met een bal gespeeld. Je hebt dan misschien gemerkt dat het niet meevalt om een bal helemaal onder water te duwen. En heb je de bal onder water dan valt het niet mee hem onder water op zijn plaats te houden. Als je de bal onder water loslaat dan schiet hij omhoog en springt soms een aardig stuk boven het water uit.
In deze opgave nemen we aan dat de bal niet vervormt, dus steeds zuiver rond blijft.

figuur 2

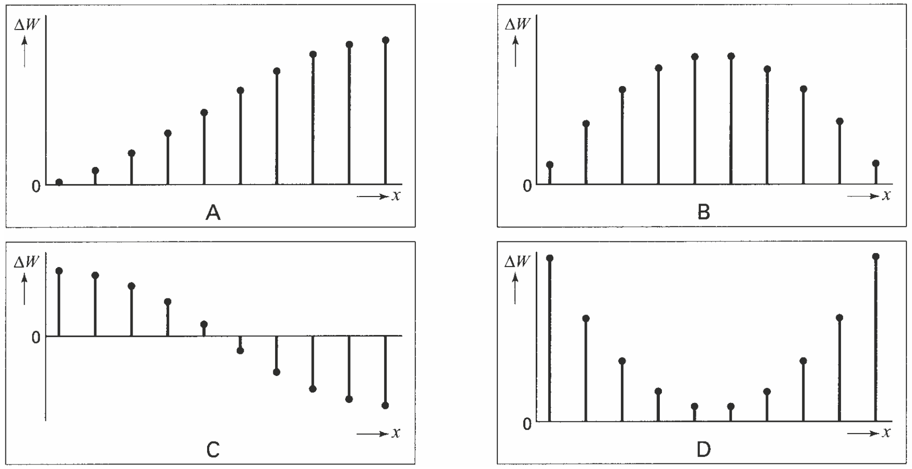


In figuur 2 is de bal gedeeltelijk onder water. De diameter van de bal is *d*. De afstand van de onderkant van de bal tot het wateroppervlak noemen we *x*. *W* is het volume van het deel van de bal dat *onder water* is.

© ThiemeMeulenhoff

Je hebt de bal boven water en duwt hem langzaam in het water tot hij helemaal onder water is. In figuur 3 zie je vier diagrammen, waarin de *toename* van *W* is weergegeven. Drie van de vier diagrammen zijn niet goed.

figuur 3

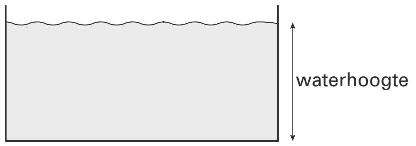


18 Welk van deze toenamediagrammen past bij het onder water duwen van de bal? Licht je antwoord toe.

Wiskunde in bad

Misschien is het je na het nemen van een bad wel eens opgevallen dat het water in het begin sneller wegloopt dan aan het eind. Aan de hand van een wiskundig model gaan we dat hier onderzoeken. De vorm van het bad is een rechthoekige bak. Nadat we de stop eruit getrokken hebben, wordt de hoogte van het badwater steeds kleiner. Deze hoogte noemen we de waterhoogte. Zie figuur 4.

figuur 4



Tijdens het leeglopen wordt op een aantal tijdstippen de waterhoogte gemeten. Bij deze meetresultaten past de volgende formule:

waterhoogte = $(7 - 0{,}03t)^2$

Hierbij wordt de *waterhoogte* gegeven in centimeter en de tijd *t* in seconden. Als het bad vol is, is volgens de formule de waterhoogte 49 cm. Op $t = 0$ begint het bad leeg te lopen.

Als de waterhoogte gelijk is aan 0 is het bad helemaal leeggelopen.
19 Toon aan dat het leeglopen van het bad ongeveer 233 seconden duurt.

© ThiemeMeulenhoff

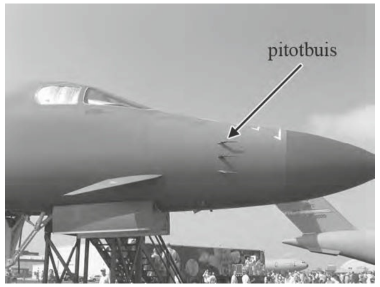
20 Bereken het differentiequotiënt (de gemiddelde verandering) van t = 0 tot t = 10 sec. De uitkomst is negatief. Wat is de betekenis van dit getal voor het leeglopen van het bad?

21 Bereken het differentiequotiënt tussen t = 20 en t = 30 seconden. Vergelijk de uitkomst met de uitkomst van de vorige opgave. Gebruik de term sneller om de betekenis van het verschil tussen de uitkomst van de vorige opgave en deze opgave uit te leggen.

Pitotbuis

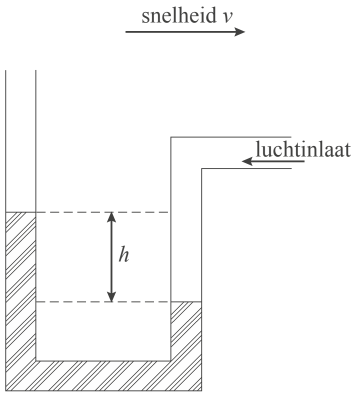
Voor de piloot van een vliegtuig is de 'air speed' heel belangrijk. Dit is de snelheid van het vliegtuig ten opzichte van de omringende lucht. Deze snelheid wordt gemeten met pitotbuizen: kleine buisvormige uitsteeksels aan de romp of vleugel van een vliegtuig. Zie de foto.

foto



Een eenvoudige versie van een pitotbuis is een gebogen buis met een vloeistof erin, zie figuur. 5. De werking is als volgt.
Het vliegtuig vliegt naar rechts, zodat aan de rechterkant lucht de buis instroomt en daar de vloeistof wegdrukt, zie figuur 5.
De vloeistof in de linkerbuis komt dan hoger te staan. De hoogte van de vloeistof in de linkerbuis ten opzichte van de rechterbuis kan worden gemeten. Een hogere snelheid geeft een grotere hoogte.

figuur 5



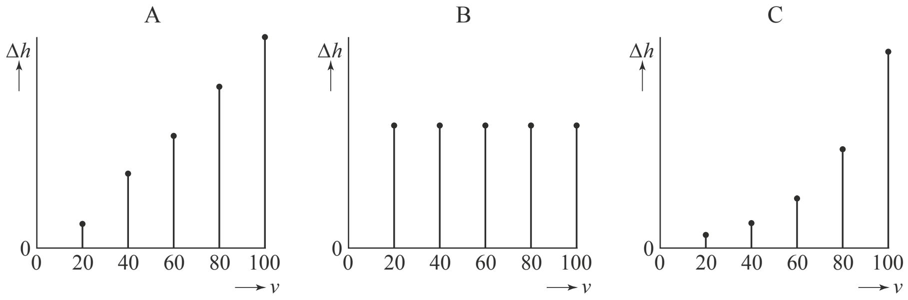
Je kunt met zo'n buis ook de snelheid van je auto bepalen op een windstille dag. Het enige wat je daarvoor nodig hebt, is een met water gevulde doorzichtige plastic buis die je tot een pitotbuis vormt. Het uiteinde voor de luchtinlaat wordt buiten de auto in de rijrichting geplaatst.

Een natuurkundedocent heeft op deze manier de hoogte h in cm gemeten bij verschillende snelheden v in km per uur. De resultaten staan in de tabel.

tabel

snelheid v (in km/uur)	0	20	40	60	80	100
hoogte h (in cm)	0	0,2	0,8	1,7	3,0	4,7

Bij de tabel kan een toenamediagram getekend worden. Hieronder staan drie toenamediagrammen waarvan er slechts één juist is.



We gaan ervan uit dat het toenamediagram zich op dezelfde manier voortzet voor snelheden groter dan 100 km per uur.

22 Onderzoek welk toenamediagram het juiste is en bereken de hoogte h bij een snelheid van 120 km per uur.

Hints bij hoofdstuk 3

1 Toenemende stijging als de staven boven de tijd-as in het toenamediagram steeds langer worden.

2 Toenemende daling als de staven onder de tijd-as in het toenamediagram steeds langer worden.

3 Kijk naar de positieve toenames en bereken eerst de totale toename.

4 Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden en gebruik de grafische rekenmachine.

5 Lineaire functie, dus de toename per jaar is constant en is gelijk aan de richtingscoëfficiënt.

6 Bereken eerst de toename over 10 jaar en daarna de gemiddelde toename per jaar.

7 Het gaat om de toename in het jaar 2030, dus van 1 januari 2030 tot 1 januari 2031.

8 Bij model 2 is er sprake van exponentiële groei.

9 Lees de afstand en tijd af in de grafiek en reken daarna om naar km/uur.

10 Kijk naar de eerste 10 seconden.

11 Hoe steiler de grafiek, hoe hoger zijn snelheid.

12 Maak met behulp van de grafiek bijvoorbeeld eerst een tabel met daarin het aantal kg bij $x = 1$, $x = 2$ t/m $x = 9$. Bereken daarna de toenames per jaar.

13 Maak gebruik van het toenamediagram in je antwoord op het vorige onderdeel.

14 Bereken eerst de gemiddelde prijs per ei.

15 In 2006 zijn er evenveel eieren aangevoerd als in 2005. Met behulp van het toenamediagram zijn de hoeveelheden voor januari tot en met juni te bepalen.

16 Kijk in de grafiek naar de grootste toename of afname.

17 Gebruik de toe- en afnames vanaf mei.

18 Vergelijk de toename van het water aan het begin van de onderdompeling en als de bal al half onder water is.

19 Bedenk wat de waterhoogte is als het bad helemaal is leeggelopen en welke vergelijking hier bij hoort.

20 Differentiequotiënt: de gemiddelde verandering van $t = 0$ tot $t = 10$

21 Bereken eerst het differentiequotiënt van $t = 20$ tot $t = 30$ en vergelijk de uitkomsten. Wat zegt dit over de snelheid van het leeglopen?

22 Bereken eerst de toename van de hoogtes door gebruik te maken van de tabel en controleer welke grafiek hier het beste bij past.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 3

Temperatuurverloop

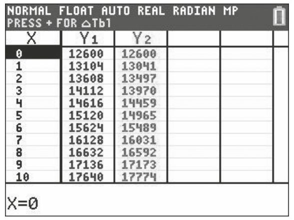
1 *Er is sprake van toenemende stijging als de staven boven de tijdas in het toenamediagram steeds langer worden.*
Van januari naar februari is de toename 1,5 °C, de maand erna is de toename 2 °C, daarna is de toename 2,5 °C.
De staven worden steeds langer, dus er is sprake van een toenemende stijging van januari tot en met april.

2 *Er is sprake van toenemende daling als de staven onder de tijdas in het toenamediagram steeds langer worden.*
Van september tot en met november worden de staven steeds langer, dus er is sprake van een toenemende daling van september tot en met november.

3 *Kijk naar de positieve toenames.*
De totale toename van januari tot en met augustus is
1,5 + 2 + 2,5 + 2,5 + 4 + 4 + 0,5 = 17 °C
De gemiddelde temperatuur in januari is 18 °C, dus in augustus is dit 18 + 17 = 35 °C.

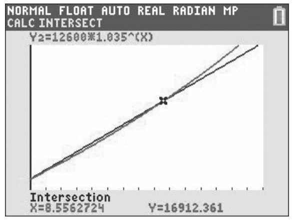
Bevolkingsgroei

4 *Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.*
$A_1 = 504 \cdot t + 12\,600$ en $A_2 = 12\,600 \cdot 1{,}035^t$ en $t = 0$ is 1-1-2016.
Opgelost moet worden $A_1 > A_2$
Gebruik de grafische rekenmachine.
Voer in $y_1 = 504 \cdot x + 12\,600$ en $y_2 = 12\,600 \cdot 1{,}035^x$
Oplossing met de tabel
De waarden in de tabel zijn de waarden op 1 januari.
Op $t = 0$ zijn er evenveel inwoners en voor $t = 1$ t/m $t = 8$ is $A_1 > A_2$. Dus op 1 januari zijn er van 2017 t/m 2024 volgens model 1 meer inwoners dan volgens model 2.



X	Y1	Y2
0	12600	12600
1	13104	13041
2	13608	13497
3	14112	13970
4	14616	14459
5	15120	14965
6	15624	15489
7	16128	16031
8	16632	16592
9	17136	17173
10	17640	17774

Oplossing met de grafiek
Kies bijv een Window [0,20] × [12 000, 20 000]
Intersect levert $x = 8{,}56$ dus na iets meer dan een half jaar in 2024 zijn er volgens model 1 en 2 evenveel inwoners. Op 1 januari 2024 zijn er dus meer inwoners volgens model 1.
De grafiek van model 1 ligt boven de grafiek van model 2 van 2017 t/m 1-1-2024.



5 Model 1 is een lineaire functie, dus de toename per jaar is constant.
$A_1 = 504 \cdot t + 12\,600$, de richtingscoëfficiënt is 504.
t is in jaren dus de toename van het aantal inwoners per jaar is dus 504.

6 *Gemiddelde toename per jaar, t = 0 is 1 januari 2016.*
Op 1 januari 2020 is $t = 4$: $A_2(4) = 12\,600 \cdot 1{,}035^4 = 14\,459$.
Op 1 januari 2030 is $t = 14$: $A_2(14) = 12\,600 \cdot 1{,}035^{14} = 20\,396$.
Gemiddelde toename is $\frac{20\,396 - 14\,459}{10} = 593{,}7$.
De gemiddelde toename van het aantal inwoners per jaar is afgerond ongeveer 594.

© ThiemeMeulenhoff

7 *Het gaat om de toename in 2030, dus van 1-1- 2030 tot 1-1-2031, t = 0 is 1 januari 2016.*
Op 1 januari 2030 is $t = 14$: $A_2(14) = 12\,600 \cdot 1{,}035^{14} = 20\,396$.
Op 1 januari 2031 is $t = 15$: $A_2(15) = 12\,600 \cdot 1{,}035^{15} = 21\,109$.
De absolute toename in 2030 is volgens model 2: 21 109 – 20 396 = 713.
De toename volgens model 1 is altijd 504 per jaar.
$\frac{713 - 504}{504} \cdot 100\,\% = \frac{209}{504} \cdot 100\,\% = 41{,}47$
Conclusie: de toename in 2030 volgens model 2 is afgerond 41% groter dan volgens model 1.

8 *De formule van model 2 is een exponentiële functie met een groeifactor 1,035.*
Elk jaar stijgt het aantal inwoners met 3,5% ten opzichte van het jaar ervoor. Elk jaar is de absolute stijging iets groter dan het jaar ervoor. Er is sprake van een toenemende stijging.

Afgelegde weg

9 *Lees de afstand en tijd af in de grafiek en reken daarna om naar km/uur.*
In 80 seconden legt Marc 400 meter af. Gevraagd wordt naar de afstand in km/uur.
Zijn snelheid is $\frac{400}{80} = 5$ m/sec.
Dit is 0,005 km/sec dus $0{,}005 \cdot 3600 = 18$ km/uur.

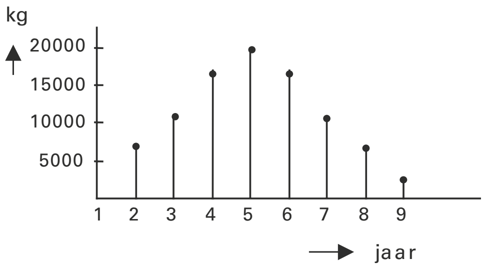
10 *Kijk naar t = 0 en t = 10.*
Na 10 seconden heeft hij ongeveer 25 meter afgelegd. Dus zijn snelheid gedurende de eerste 10 seconden is ongeveer 2,5 m/sec.

11 *Kijk in de grafiek naar de steilheid.*
Na ongeveer 50 seconden is zijn snelheid het grootst. De grafiek loopt hier het steilst, dus hij legt meer meter per seconde af. Zijn snelheid is dan ongeveer 80 meter per 10 seconden, dus zijn snelheid is dan ongeveer 8 m/sec.

Viskwekerij

12 *Lees uit de grafiek de gegevens van de eerste en tweede kolom af.*

jaar	visstand in kg	toename (Δ kg)
1	5 000	
2	12 000	7 000
3	23 000	11 000
4	40 000	17 000
5	60 000	20 000
6	77 000	17 000
7	88 000	11 000
8	95 000	7 000
9	98 000	3 000



© ThiemeMeulenhoff

13 In het toenamediagram bij het vorige onderdeel is te zien dat in het 5e jaar (interval 4–5) de toename het grootst is namelijk 20 000 kg.
Dit is ook te zien in de figuur bij de opgave, want de grafiek loopt het steilst van jaar 4 tot jaar 5, dus in het 5e jaar is de toename van de visstand het grootst.
Als de viskweker 5 jaar wacht, is er 60 000 kg vis. Hij kan dan per jaar steeds 20 000 kg vis vangen. De visstand is na de vangst 40 000 en zal dan volgens de grafiek in één jaar weer aangroeien tot 60 000, zodat de viskweker weer 20 000 kg vis kan vangen etc.

Eieren

14 In 2004 werden er 5 457 377 000 eieren geëxporteerd voor 517 846 000 euro.
Dit is $\frac{517\,846\,000}{5\,457\,377\,000} = 0{,}0949$ euro = 9,49 eurocent per ei.
In 2005 werden er 5 354 488 000 eieren geëxporteerd voor 685 357 000 euro.
Dit is $\frac{685\,357\,000}{5\,354\,488\,000} = 0{,}128$ euro = 12,8 eurocent per ei.
Procentuele toename = $\frac{12{,}8 - 9{,}49}{9{,}49} \cdot 100\% = 35\%$.

15 In 2006 zijn er evenveel eieren aangevoerd als in 2005. Dus in 2006 zijn er in totaal 8231 miljoen eieren aangevoerd.
De aanvoer in de tweede helft van 2006 is de totale aanvoer minus de aanvoer in de eerste helft van 2006.
In december 2005 zijn er 730 miljoen eieren aangevoerd. Met behulp van het toenamediagram zijn de hoeveelheden voor januari tot en met juni te bepalen.

aanvoer in	berekening	totaal in miljoenen
januari	730 – 23	707
februari	707 – 46	661
maart	661 + 26	687
april	687 – 70	617
mei	617 + 70	687
juni	687 – 68	619
		3978

aanvoer eerste helft van het jaar = 3978 miljoen.
aanvoer tweede helft van 1996 = 8231 – 3978 miljoen = 4253 miljoen.

Etmaaltemperatuur

16 *Kijk in de grafiek naar de grootste toename of afname.*
In december is er een afname van 6 °C vergeleken met die in november. Dit is de grootste verandering van de gemiddelde etmaaltemperatuur.

17 *Bekijk de som van alle toe- en afnames vanaf mei.*
In mei was de gemiddelde etmaaltemperatuur 12 °C.
De toe- en afnames vanaf mei zijn: + 5 + 2 + 0 – 4 – 3 – 5 – 6 = –11.
Dus de temperatuur in december is 12 – 11 = 1 °C.

© ThiemeMeulenhoff

Bal uit het water

18 De doorsnede van de bal met de wateroppervlakte is een cirkel met diameter *d*. Hoe groter deze diameter, hoe groter de toename van het volume *W*. Dus de toename is het grootste als de bal halverwege is en het kleinst in het begin en aan het einde (als de bal bijna onder water is).
Conclusie: toenamediagram B past bij het onder water duwen van de bal.

Wiskunde in bad

19 *Bedenk wat de waterhoogte is als het bad helemaal is leeggelopen en welke vergelijking hier bij hoort.*
waterhoogte = 0 als $(7 - 0{,}03 \cdot t)^2 = 0$
$7 - 0{,}03 \cdot t = 0$ dus $0{,}03 \cdot t = 7$ dus $t = 7 : 0{,}03 = 233{,}33$
Conclusie: het leeglopen duurt ongeveer 233 seconden.

20 *Gebruik de formule.*
$t = 0$ dus waterhoogte = $(7 - 0{,}03 \cdot 0)^2 = 49$ cm
$t = 10$ dus waterhoogte = $(7 - 0{,}03 \cdot 10)^2 = 44{,}89$ cm
differentiequotiënt = $\frac{49 - 44{,}89}{0 - 10} = -0{,}411$
Conclusie: tijdens de eerste 10 seconden zakt het water gemiddeld 0,411 cm per seconde.

21 *Gebruik de formule.*
$t = 20$ dus waterhoogte = $(7 - 0{,}03 \cdot 20)^2 = 40{,}96$ cm
$t = 30$ dus waterhoogte = $(7 - 0{,}03 \cdot 30)^2 = 37{,}21$ cm
differentiequotiënt = $\frac{40{,}96 - 37{,}21}{0 - 10} = -0{,}375$
Conclusie: de eerste 10 seconden loopt het bad sneller leeg dan tussen de 20^e en de 30^e seconde.

Pitotbuis

22 *Bereken eerst de toename van de hoogtes door gebruik te maken van de tabel en controleer welke grafiek hier het beste bij past.*
De toenamen zijn achtereenvolgens: 0,2; 0,6; 0,9; 1,3; 1,7.
De toenamen nemen ongeveer gelijkmatig (met 0,4) toe. Het toenamediagram A is juist.
De toename van 100 km naar 120 km per uur zet zich op dezelfde manier voort, dus je kunt een toename verwachten van 1,7 + 0,4 = 2,1.
Conclusie: de hoogte bij 120 km per uur is 4,7 + 2,1 = 6,8 cm.

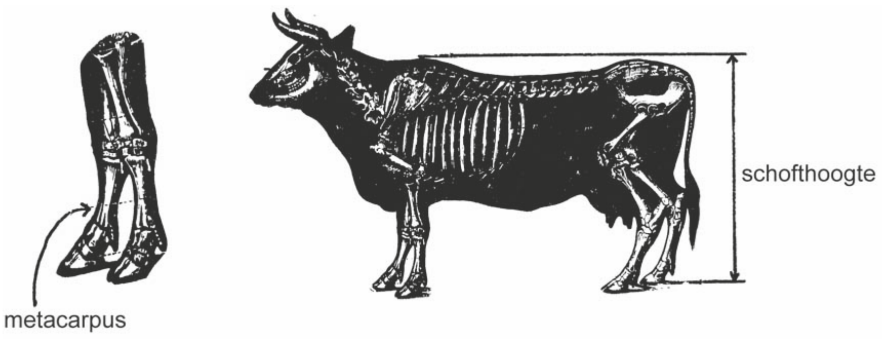
© ThiemeMeulenhoff

4 Lineaire verbanden

Schofthoogte

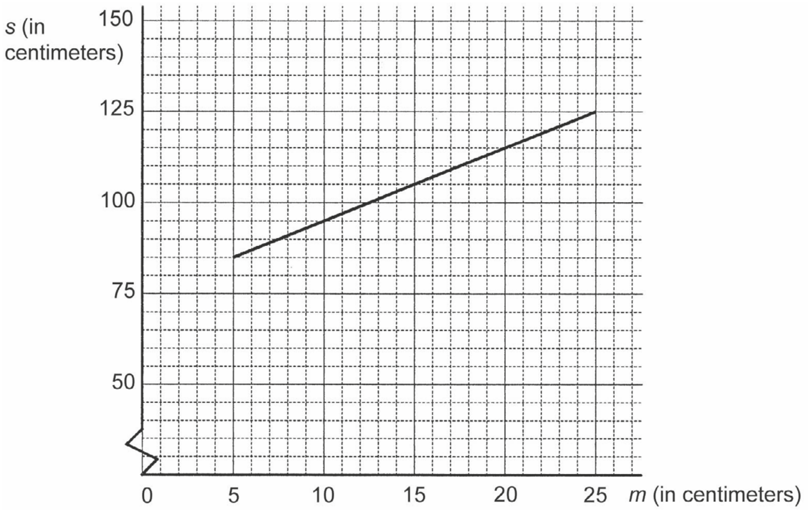
Oudheidkundigen proberen informatie te krijgen over de voedselsituatie van vroegere bewoners van een nederzetting.
Uit botjes in afvalputten blijkt welke dieren men vroeger at en soms ook hoeveel.
Niet bekend is hoeveel voedsel een rund uit die tijd opleverde, maar daarover zou de grootte van het dier informatie kunnen geven.
Als maat voor de grootte neemt men de schofthoogte (zie figuur 1). Meestal ontbreken er botten die nodig zijn om de schofthoogte te bepalen. Vaak treft men wel een middenvoetsbeentje (metacarpus) aan:

figuur 1



Men heeft voor twee runderrassen, ***A*** en ***B***, kunnen vaststellen dat er tussen de metacarpus en de schofthoogte een verband bestaat. Dat verband verschilt per ras. Onderstaande grafiek geeft het verband tussen de schofthoogte (***s***) en de lengte van de metacarpus (***m***) voor ras ***A***.

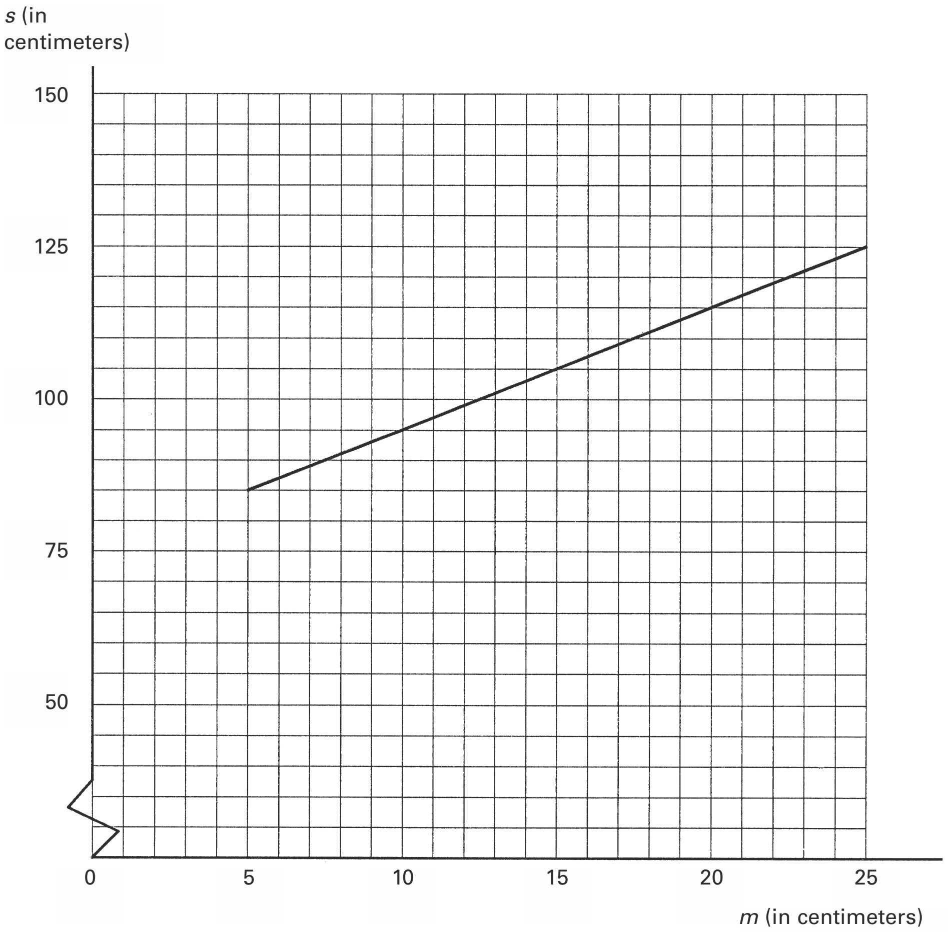
figuur 2a



© ThiemeMeulenhoff

1 Stel een formule op, die bij de grafiek van figuur 2a past.
Voor ras ***B*** geldt de formule: ***s*** = 5***m*** + 16 (5 ≤ ***m*** ≤ 25)

figuur 2b



2 Teken in figuur 2b de grafiek bij deze formule.

3 Bereken in millimeters nauwkeurig bij welke waarde van ***m*** de schofthoogten van beide rassen gelijk zijn.

In theorie zou bij opgegeven waarden van ***m*** en ***s*** van een dier vastgesteld kunnen worden of het een dier van ras ***A*** of van ras ***B*** betreft, met uitzondering van de situatie zoals bedoeld in vraag 3.
In werkelijkheid is het verband tussen de lengte van de metacarpus en de schofthoogte niet zo precies als de formules aangeven.
We nemen aan dat bij elke lengte van de metacarpus de schofthoogte kan variëren van 2 cm onder de aangegeven waarde tot 2 cm erboven.
4 Bepaal met behulp van de grafieken in figuur 2b bij welke lengten van de metacarpus er problemen kunnen optreden bij het vaststellen van het ras.

© ThiemeMeulenhoff

Uit de schofthoogte kan bij benadering het levend gewicht van een rund worden afgeleid. Er blijkt een verband te bestaan dat nagenoeg lineair is. Gegevens over dit verband staan in tabel 1.

tabel 1

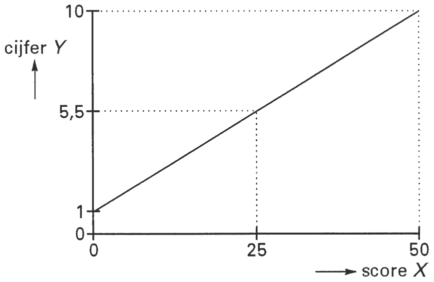
schofthoogte (cm)	levend gewicht ras ***A*** (kg)	levend gewicht ras ***B*** (kg)
110	400	380
120	470	435

De lengte van een gevonden metacarpus is 21 cm. Het botje kan van een rund van ras ***A*** of van ras ***B*** zijn.
5 Bereken voor beide mogelijkheden het levend gewicht.

Scores en cijfers

Bij toetsen met 50 meerkeuzevragen wordt geteld hoeveel vragen een kandidaat goed heeft. Dit aantal noemt men de score *X*.
Hierna wordt de score *X* omgezet in een cijfer *Y*. Een kandidaat die niets goed heeft, krijgt altijd een 1, dus bij *X* = 0 hoort *Y* = 1. Wie alle vragen goed beantwoord heeft, krijgt natuurlijk een 10: bij *X* = 50 hoort *Y* = 10.

figuur 3



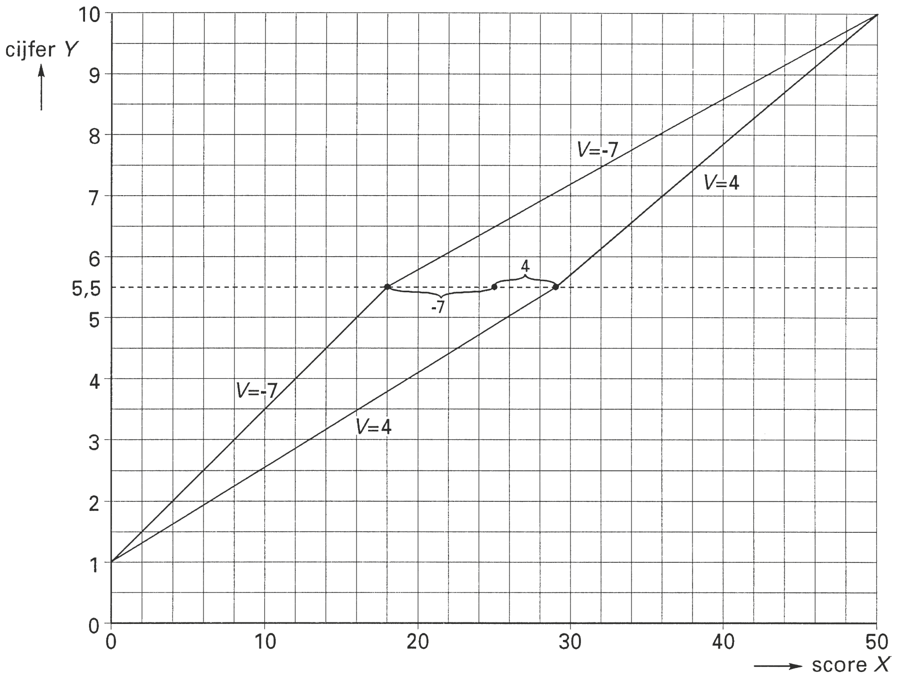
Stel dat er een lineair verband bestaat tussen *X* en *Y*. Zie figuur 3. Voor het gemak is er een lijn getekend in plaats van losse punten.
Een kandidaat heeft 35 vragen goed.
6 Bereken het bijbehorende cijfer *Y* in 1 decimaal nauwkeurig.

Bij het cijfer 5,5 ligt de omslag van voldoende naar onvoldoende.
Daarom noemen we de score waarbij het cijfer 5,5 hoort, de omslagscore.
Meestal zal de omslagscore bij *X* = 25 liggen. Dit is ook het geval in figuur 3.

Soms is de omslagscore niet 25. Er is dan sprake van een verschuiving *V*.
In figuur 4 is twee keer een verband tussen *X* en *Y* getekend bij een verschuiving.
De ene grafiek hoort bij een te moeilijke toets: bij 18 vragen goed krijg je al een 5,5.
De verschuiving is in dit geval negatief: *V* = – 7.
De andere grafiek hoort bij een toets met gemakkelijke vragen: voor een 5,5 moeten nu 29 vragen goed beantwoord zijn. Daar is *V* = 4.
De grafiek bestaat na een verschuiving *V* altijd uit twee (rechte) lijnstukken.

© ThiemeMeulenhoff

figuur 4



Bij een zekere toets behaalt een leerling met 40 goed beantwoorde vragen het cijfer Y = 7,5.

7 Bepaal met behulp van figuur 4 hoe groot de verschuiving V is. Laat zien hoe het antwoord gevonden is.

Stel dat een leerling 35 vragen goed beantwoord heeft en dat vooraf vaststaat dat de verschuiving die kan plaatsvinden van V = 0 tot en met V = 4 mag lopen.

8 Kan deze leerling het cijfer 6,6 behalen? Licht je antwoord toe.

Veldkrekels

De veldkrekel is een toonkunstenaar. Moeiteloos sjirpt hij een hoge C. Het tempo van de roepzang is afhankelijk van het weer. Bij fris weer laat de veldkrekel gemiddeld één sjirp per seconde horen, bij warm weer wel gemiddeld vijf, met alle variaties daartussen. Sterker, de veldkrekel kan eigenlijk wel als een thermometer gebruikt worden.
De onderzoeker M. Duijm heeft daar eens een berekening voor uitgedokterd. Het rekenvoorschrift luidt: neem het gemiddelde aantal sjirpen per vijf seconden, tel er zeven bij op, en je weet de temperatuur in graden Celsius.
Midas Dekkers evenwel hanteert een rekenvoorschrift waarbij je moet uitgaan van het gemiddeld aantal sjirpen per minuut. Je trekt er veertig van af, deelt de uitkomst door zeven en telt er tien bij op.

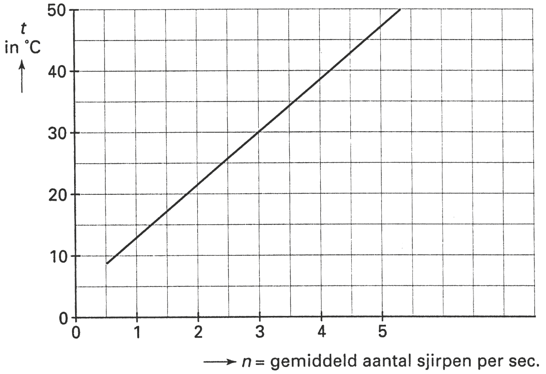
Bovenstaande tekst is ontleend aan het Brabants Dagblad van 28 mei 1997.

Stel dat een krekel op een zeker moment gemiddeld 2,4 sjirpen per seconde maakt. Als we met de twee rekenvoorschriften de temperatuur op dat moment berekenen, vinden we twee heel verschillende uitkomsten.

9 Hoeveel graden verschillen die uitkomsten? Licht je antwoord toe.

10 Stel voor M. Duijm de formule op die de temperatuur t (in °C) uitdrukt in het gemiddeld aantal sjirpen n per seconde.

figuur 5 **grafiek van het rekenvoorschrift van Midas Dekkers**



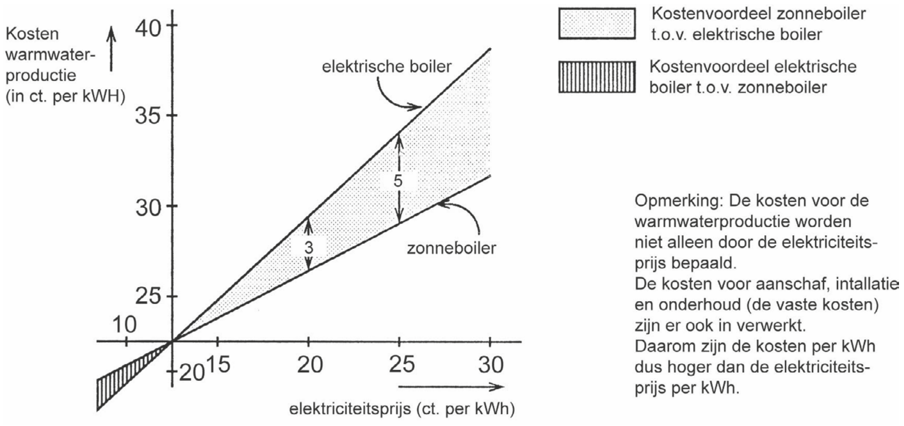
Voor het verschil dat bij vraag 9 gevonden is, is een eenvoudige verklaring: niet alle krekels sjirpen hetzelfde. Het rekenvoorschrift van Duijm geldt voor de veldkrekel, terwijl Dekkers het heeft over de sneeuwboomkrekel. Bij alle soorten krekels sjirpen de mannetjes om wijfjes te lokken. De wijfjes herkennen hun eigen soort aan de sjirpsnelheid, dus aan het aantal sjirpen per seconde.

11 Bij welke temperatuur kan het veldkrekelvrouwtje geen verschil horen tussen een veldkrekelmannetje en een sneeuwboomkrekelmannetje? Licht je antwoord toe. Je kunt daarbij figuur 5 gebruiken.

Zonneboiler

Boilers produceren warm water. Het verwarmen gebeurt bij een zonneboiler gedeeltelijk met (gratis) zonnewarmte. De rest van het verwarmen gebeurt elektrisch. Een elektrische boiler verwarmt het water uitsluitend met elektriciteit en verbruikt dus meer elektriciteit dan een zonneboiler. Een zonneboiler is echter een duurder apparaat. Of een zonneboiler voordeliger is, hangt daarom af van de elektriciteitsprijs. In de grafiek van figuur 6 zijn de kosten voor de twee soorten boilers bij verschillende elektriciteitsprijzen af te lezen.

figuur 6



12 Bereken de elektriciteitsprijs waarbij het kostenvoordeel van de zonneboiler ten opzicht van de elektrische boiler 10 cent per kWh is.

13 Teken een grafiek waarin het kostenverschil tussen de elektrische boiler en de zonneboiler wordt uitgezet tegen de elektriciteitsprijs. Neem op de horizontale as het stuk van 10 tot 30 ct. per kWh.

De elektriciteitsprijs is volgens het nachttarief 15 cent per kWh en volgens het dagtarief 25 cent per kWh.
Iemand wil een boiler zo gebruiken dat 75% van de benodigde elektriciteit tegen nachttarief verbruikt wordt.

14 Bereken hoeveel cent per kWh het kostenvoordeel van de zonneboiler ten opzichte van de elektrische boiler in dat geval is.

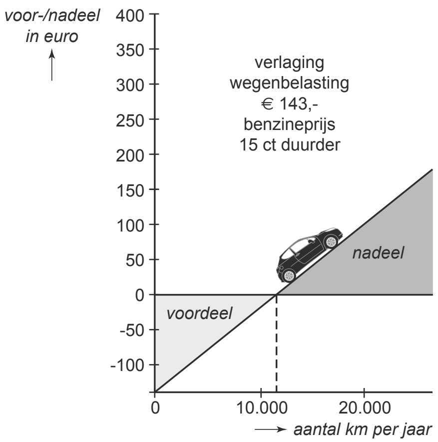
Neem aan dat in een gemiddeld huishouden per jaar 2250 kWh aan energie voor warm water nodig is. In werkelijkheid wordt daarvoor bij een elektrische boiler meer elektriciteit gebruikt, omdat zo'n boiler een rendement van 90% heeft (dat wil zeggen dat maar 90% van de energie verkregen uit de elektriciteit nuttig gebruikt wordt).
De vaste kosten per jaar bedragen € 155.
De elektriciteitsprijs kan per jaar veranderen. Stel die prijs op *p* euro per kWh.

15 Geef voor deze boiler een formule die de totale jaarlijkse kosten *TJK* (in euro's) uitgedrukt in *p*.

Auto's en kosten

Om het autogebruik te verminderen stelde de regering in augustus 2005 een aantal financiële maatregelen voor. Er werd voorgesteld de prijzen van de verschillende brandstoffen te verhogen. Daar stond tegenover dat de jaarlijkse wegenbelasting verlaagd werd.
Naar aanleiding van deze voorstellen maakte een journalist van het Brabants Dagblad een plaatje (zie figuur 7). Daarin werden de maatregelen verwerkt voor auto's die op benzine rijden. We zien dat de wegenbelasting voor benzineauto's met € 143 verlaagd wordt en dat de benzine 15 cent per liter duurder wordt.
In het vervolg van deze opgave gaan we uit van een verbruik van 1 op 12,5 bij een benzineauto. Dat wil zeggen dat een automobilist op 1 liter benzine 12,5 km kan rijden.

figuur 7 **benzineverbruik 1 op 12,5**



Zoals je in het plaatje kunt zien, zullen er automobilisten zijn die, bij een ongewijzigd aantal kilometers per jaar, voordeel hebben van deze maatregel. Andere automobilisten zullen echter duurder uit zijn als ze hun kilometeraantal per jaar niet aanpassen.

16 Bereken hoe groot het jaarlijkse nadeel is voor een automobilist die zowel voor als na de invoering van de overheidsmaatregelen 40 000 kilometer per jaar rijdt.

In figuur 7 kun je het aantal kilometers per jaar waarbij een automobilist geen voordeel én geen nadeel heeft, niet precies aflezen. Je kunt het echter wel berekenen.

17 Bereken dit aantal in kilometers nauwkeurig.

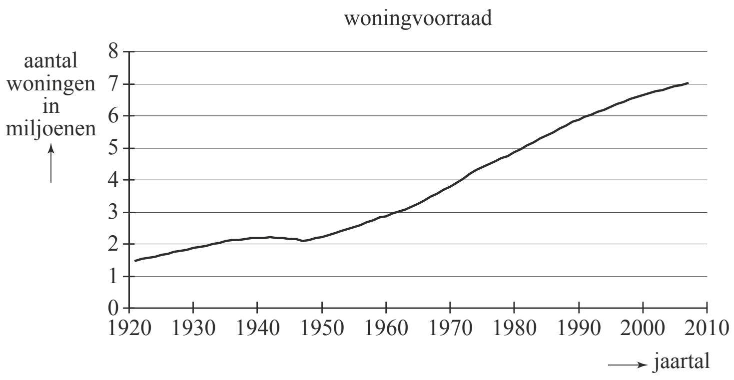
De voorstellen van de regering betroffen niet alleen benzineauto's.
Voor dieselauto's werd voorgesteld de jaarlijkse wegenbelasting met € 114 te verlagen.
De prijs van een liter diesel zou met 6 cent verhoogd worden.

18 Maak een grafiek als die in figuur 7 voor een dieselrijder die gemiddeld 1 op 16 rijdt. Licht je werkwijze toe.

Woningvoorraad

In de Arnhemse nieuwbouwwijk Schuytgraaf werd op 5 november 2007 gevierd dat de woningvoorraad (het aantal woningen) in Nederland de grens van de zeven miljoen had bereikt.
Rond 1896 doorbrak de woningvoorraad de grens van één miljoen woningen.
In 1934 werd de grens van twee miljoen bereikt. Hierna duurde het tot 1962 voordat de grens van de drie miljoen woningen werd gepasseerd. In 1992 bereikte de woningvoorraad de zes miljoen, en in 2007 is dus de grens van de zeven miljoen woningen overschreden. Zie figuur 8.

figuur 8



In de periode 1962 – 1992 is het aantal woningen vrijwel lineair gestegen van 3 miljoen tot 6 miljoen. Daarbij hoort een formule:

$W = a \cdot t + b$

Hierin is W het aantal woningen in miljoenen en t het aantal jaren na 1962.

19 Bereken a en b.

Mobiel bellen

Na lang aandringen van de kinderen en kleinkinderen heeft oma eindelijk besloten een mobiele telefoon aan te schaffen. Ze heeft gekozen voor een speciale seniorentelefoon, met grote toetsen en een heel simpel menu. Sms'en vindt oma niet nodig. Ze gaat haar mobiele telefoon alleen voor bellen gebruiken.
Ze vergelijkt twee aanbiedingen:

1. Prepaid: je betaalt alleen gesprekskosten, deze zijn 15 cent per belminuut.
2. Abonnement: je betaalt 9,95 euro per maand voor 75 gratis belminuten. Bel je méér dan kost dit 23 cent per extra belminuut.

Het is duidelijk dat prepaid goedkoper is als oma heel weinig belt. Maar ook als ze heel veel belt, is prepaid goedkoper wegens de lagere gesprekskosten per belminuut.

20 Onderzoek bij welke aantallen belminuten per maand prepaid goedkoper is.

© ThiemeMeulenhoff

Kinderalimentatie

Als ouders scheiden, blijven de kinderen meestal bij één van de ouders wonen. Deze ouder neemt de zorg van de kinderen op zich. De andere ouder draagt financieel bij in deze zorg door maandelijks een bepaald geldbedrag, de (kinder) alimentatie, te betalen.
Bij minderjarige kinderen zijn er normen vastgesteld om de hoogte van de alimentatie te bepalen. Daarbij spelen slechts een paar zaken een rol: het aantal kinderen, de leeftijd van de kinderen en het gezinsinkomen vóór de scheiding.
In deze opgave nemen we aan dat de ouder bij wie de kinderen gaan wonen geen eigen inkomen heeft.

In de tabel is een gedeelte te zien van de tabel waarmee de alimentatie A per maand wordt bepaald in een situatie met kinderen van 6 tot en met 11 jaar.

		gezinsinkomen G (in euro per maand) vóór de scheiding					
		1500	2000	2500	3000	3500	4000
aantal kinderen	1	197	287	376	466	555	644
	2	295	431	568	704	841	977
	3	359	533	706	880	1053	1226
	4 of meer	435	645	855	1065	1275	1485

In de tabel is te zien dat bij drie kinderen en een gezinsinkomen van € 3500 de alimentatie A voor deze drie kinderen samen € 1053 is.

Er is, bij een gegeven aantal kinderen, bij benadering een lineair verband tussen de alimentatie A en het gezinsinkomen G.

21 Bereken met behulp van lineair extrapoleren de alimentatie bij twee kinderen en een gezinsinkomen van € 4820.

Hoe hoger het gezinsinkomen, hoe hoger het bedrag aan alimentatie dat betaald moet worden. Een jurist stelt: “Iemand die voor drie kinderen alimentatie moet betalen, betaalt voor elke euro gezinsinkomen boven de € 1500 ongeveer 35 cent aan alimentatie.”

22 Laat met een berekening zien of de jurist gelijk heeft.

© ThiemeMeulenhoff

Vogeltrek

Vogels die jaarlijks op een andere plaats overwinteren en na de winter terugkeren naar hun broedgebied, worden trekvogels genoemd.
Onderzoekers houden jaarlijks de terugkeerdatum van diverse soorten trekvogels bij. Deze terugkeerdatum is sinds 1980 bij vrijwel alle trekvogelsoorten steeds vroeger geworden.

gierzwaluw

Uit Engels onderzoek blijkt bijvoorbeeld dat vanaf 1980 de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger wordt. gierzwaluw In 1980 keerde de gierzwaluw op 2 mei terug.

23 Bereken op welke datum de gierzwaluw in 2020 zal terugkeren als deze trend zich voortzet.

Om voorspellingen voor de toekomst te kunnen doen, wordt een model opgesteld dat deze trend beschrijft. In dit model houden we geen rekening met schrikkeljaren.
De dagen van het jaar worden genummerd: 1 januari krijgt dagnummer 1 en 31 december dus dagnummer 365.
Het dagnummer waarop de gierzwaluw in het model terugkeert, noemen we A.
Bij de datum 2 mei hoort dagnummer $A = 122$. Zoals eerder vermeld, wordt de terugkeerdatum van de gierzwaluw per 10 jaar 3 dagen vroeger.
We noemen de tijd in jaren t, met $t = 0$ in 1980.
Er kan een lineaire formule worden opgesteld waarin A wordt uitgedrukt in t.

24 Stel deze formule op.

In Engeland wordt de gierzwaluw ook wel de honderddagenvogel genoemd, omdat hij gemiddeld 100 dagen in het land verblijft voordat hij weer naar zijn wintergebied vertrekt. Uit hetzelfde onderzoek blijkt dat deze vertrekdatum sinds 1980 ook verandert. Deze wordt elke 10 jaar ongeveer 0,6 dag vroeger. Samen met het vroeger worden van de terugkeerdatum leidt dit ertoe dat de verblijfsduur langer wordt.
Ga ervan uit dat in 1980 de verblijfsduur 100 dagen is.

25 Bereken in welk jaar de gierzwaluw dan voor het eerst meer dan 115 dagen in Engeland verblijft als de genoemde trends zich voortzetten.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 4

1 De grafiek is een rechte lijn, dus de formule is van de vorm $s = am + b$.

2 De grafiek is een lijnstuk. Bereken twee punten.

3 Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

4 Bepaal met behulp van de grafieken. Bedenk bij welke verticale afstand tussen de lijnen het niet duidelijk is met welk ras je te maken hebt. Lees vervolgens af voor welke waarden van m dit het geval is.

5 Lineair verband, dus de formule voor het gewicht g is van de vorm $g = as + b$.

6 Lijn gaat door (0, 1) en (50, 10), dus per goede vraag krijg je er … punt bij.

7 Bepaal met behulp van de grafiek. 40 vragen goed geeft het cijfer 7,5. Bedenk welke rechte lijn hier bij hoort en lees vervolgens af waar de omslagscore ligt.

8 In de figuur is de lijn $V = 4$ al getekend. Teken ook de lijn bij $V = 0$. Bekijk waar het punt (35; 6,6) ligt. Wat is nu je conclusie?

9 Het gemiddeld aantal sjirpen is 2,4 per seconde. Duijm: temperatuur is gelijk aan gemiddelde van aantal sjirpen per vijf seconden plus 7 en bij Dekkers: temperatuur is gelijk aan …..

10 Duijm: n is het aantal sjirpen per seconde. De temperatuur is gelijk aan gemiddelde van aantal sjirpen per vijf seconden plus 7, dus de formule uitgedrukt in n wordt …

11 Teken bijvoorbeeld in de figuur ook de grafiek van Duijm. Welk punt wordt gevraagd?

12 In de figuur is af te lezen dat het verschil 3 ct is bij 20 kWh en 5 ct bij 25 kWh. Gevraagd wordt naar een verschil van 10 ct.

13 De grafiek is een rechte lijn. Bepaal enkele punten met behulp van de figuur.

14 75% is nachttarief dus …% is dagtarief. Bereken met behulp van deze gegevens het gemiddelde tarief.

15 Het rendement is 90%. Bedenk eerst hoeveel energie er geleverd moet worden voor de benodigde 2250 kWh.

16 Met 1 liter benzine kun je 12,5 km rijden. Het aantal kilometer blijft gelijk De benzine wordt 15 cent duurder, bereken de extra kosten voor benzine. De belasting gaat omlaag. Het nadeel voor de automobilist wordt gevraagd.

17 Er is geen voordeel of nadeel als de extra kosten voor benzine gelijk zijn aan de verlaging van de wegenbelasting.

18 De grafiek wordt een rechte lijn. Het is voldoende om twee punten van de grafiek te bepalen.

19 In 1962 zijn er 3 miljoen woningen en in 1992 zijn er 6 miljoen. Er is lineaire groei.

20 Prepaid kost altijd 15 cent per minuut. Abonnement bestaat uit een vast bedrag per maand en boven de 75 belminuten 23 cent per belminuut. Bij beide mogelijkheden is sprake van lineaire groei. Vergelijk de uitkomsten bij weinig en bij veel belminuten.

21 Lineair extrapoleren: maak gebruik van de waarden uit de tabel bij twee kinderen en bijvoorbeeld het gezinsinkomen bij 3500 en bij 4000 euro. Bereken eerst de toename van de alimentatie per 500 euro.

© ThiemeMeulenhoff

22 Maak gebruik van de waarden uit de tabel bij drie kinderen en bijvoorbeeld het gezinsinkomen bij 1500 en bij 2000 euro. Bereken eerst de toename van de alimentatie per 500 euro en dan per euro.

23 April telt 30 dagen. Reken terug vanaf 2 mei.

24 De startwaarde op $t = 0$ (1988) is 122 en per 3 jaar is de afname 3 dagen. Lineaire formule.

25 Hoeveel wordt de aankomst per jaar eerder en hoeveel dagen het vertrek? Met deze gegevens bereken je hoeveel het verblijf per jaar langer wordt.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 4

Schofthoogte

1 *De grafiek is een rechte lijn er is dus een lineair verband; de formule heeft de vorm* $s = am + b$

eerste manier:

De grafiek gaat bijvoorbeeld door de punten (5, 85) en (10, 95).

De richtingscoëfficiënt $a = \frac{95 - 85}{10 - 5} = \frac{10}{5} = 2$ dus $s = 2m + b$.

Bijvoorbeeld (5, 85) invullen geeft: $85 = 2 \cdot 5 + b$ dus $b = 75$

formule: $s = 2m + 75$.

tweede manier:

(10, 95) en (5, 85) invullen in $s = am + b$

$$\begin{array}{l} 95 = 10a + b \\ 85 = 5a + b \quad - \\ \hline 10 = 5a \qquad \text{dus } a = 2 \end{array}$$

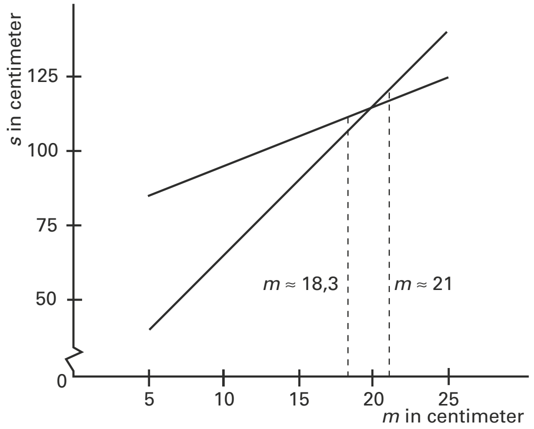
$a = 2$ invullen in $85 = 5a + b$:

$85 = 10 + b$ dus $b = 75$

formule: $s = 2m + 75$.

2 $5 \leq m \leq 25$ en $s = 5m + 16$.

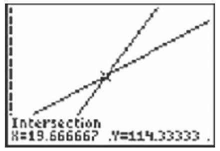
De grafiek is een lijnstuk van $(5; 5 \cdot 5 + 16) = (5, 41)$ tot en met $(25; 5 \cdot 25 + 16) = (25, 141)$.



3 De schofthoogte s van beide rassen is gelijk als $2m + 75 = 5m + 16$ dus $-3m = -59$ dus $m \approx 19{,}7$ cm ≈ 197 mm.

Controleer met de grafische rekenmachine.

Voer de functies $y_1 = 2x + 75$ en $y_2 = 5x + 16$ in en bepaal het snijpunt bijvoorbeeld met intersect.



4 Bij gegeven m kan s variëren van 2 cm onder de aangegeven waarde tot 2 cm er boven. Dus als de verticale afstand tussen de twee lijnen minder dan 4 cm is, is het niet duidelijk of je met ras A of met ras B te maken hebt.

De verticale afstand tussen de twee lijnen is 4 cm (zie figuur van onderdeel 2) als $m = 18{,}3$ en als $m = 21{,}0$. De verticale afstand tussen de lijnen is minder dan 4 cm als $18{,}3 < m < 21{,}0$.

© ThiemeMeulenhoff

5 *Er is een lineair verband, de formule heeft de vorm $g = as + b$*
(g = gewicht in kg en s = schofthoogte in cm).
Ras *A*
De punten (110, 400) en (120, 470) invullen in $g = as + b$

$$\begin{array}{rl} 470 = & 120a + b \\ 400 = & 110a + b \quad - \\ \hline 70 = & 10a \qquad \text{dus } a = 7 \end{array}$$

$a = 7$ invullen in $400 = 110a + b$
$400 = 770 + b$ dus $b = -370$ dus $g = 7s - 370$.
$s = 2m + 75$ (zie antwoord bij onderdeel 1).
$m = 21$ invullen in $s = 2m + 75$ geeft $s = 42 + 75 = 117$ cm.
$s = 117$ invullen in $g = 7s - 370$ geeft $g = 819 - 370 = 449$.
Het levend gewicht van een rund is ongeveer 449 kg.
Ras *B*
De punten (110, 380) en (120, 435) invullen in $g = as + b$

$$\begin{array}{rl} 435 = & 120a + b \\ 380 = & 110a + b \quad - \\ \hline 55 = & 10a \qquad \text{dus } a = 5{,}5 \end{array}$$

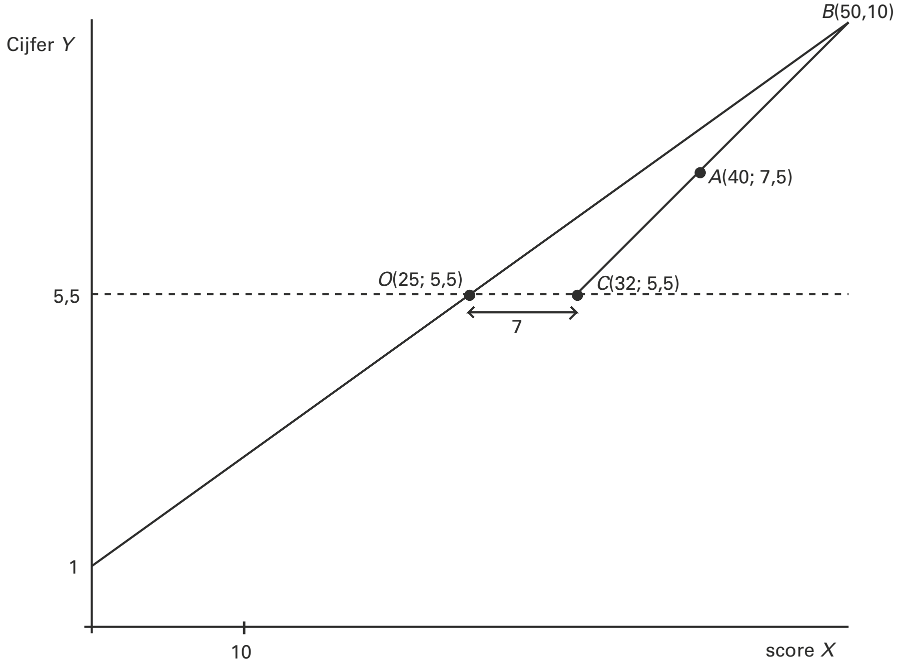
$a = 5{,}5$ invullen in $380 = 110a + b$
$380 = 605 + b$ dus $b = -225$ dus $g = 5{,}5s - 225$.
$s = 5m + 16$ (zie boven onderdeel 2 in de opgave).
$m = 21$ invullen in $s = 5m + 16$ geeft $s = 105 + 16 = 121$ cm.
$s = 121$ invullen in $g = 5{,}5s - 225$ geeft $g = 665{,}5 - 225 = 440{,}5$ kg.
Het levend gewicht van een rund is ongeveer 440,5 kg.

Scores en cijfers

6 *eerste manier:*
Lijn $Y = aX + b$ gaat door de punten (0, 1) en (50, 10).
r.c. $= a = \frac{10-1}{50-0} = \frac{9}{50} = 0{,}18$
$Y = 0{,}18X + b$ gaat door (0, 1) dus $b = 1$
$Y = 0{,}18X + 1$
$X = 35$ invullen geeft $Y = 0{,}18 \cdot 35 + 1 = 7{,}3$
Conclusie: het bijbehorende cijfer is een 7,3.
tweede manier:
Bij 0 vragen goed heb je een 1 en per goede vraag krijg je er $\frac{9}{50}$ bij.
35 goede vragen geeft dan als cijfer $35 \cdot \frac{9}{50} + 1 = 7{,}3$.
Conclusie: het bijbehorende cijfer is een 7,3.

© ThiemeMeulenhoff

7 Bij $X = 40$ goede antwoorden krijg je het cijfer $Y = 7{,}5$. Teken een lijn door *A*(40; 7,5) en *B*(50, 10).
De lijn *AB* snijdt de lijn $Y = 5{,}5$ (stippellijn) in de omslagscore $X = 32$ (punt *C*).
De verschuiving is: 32 – 25 = 7 (de afstand tussen punt *C* en (25; 5,5)).

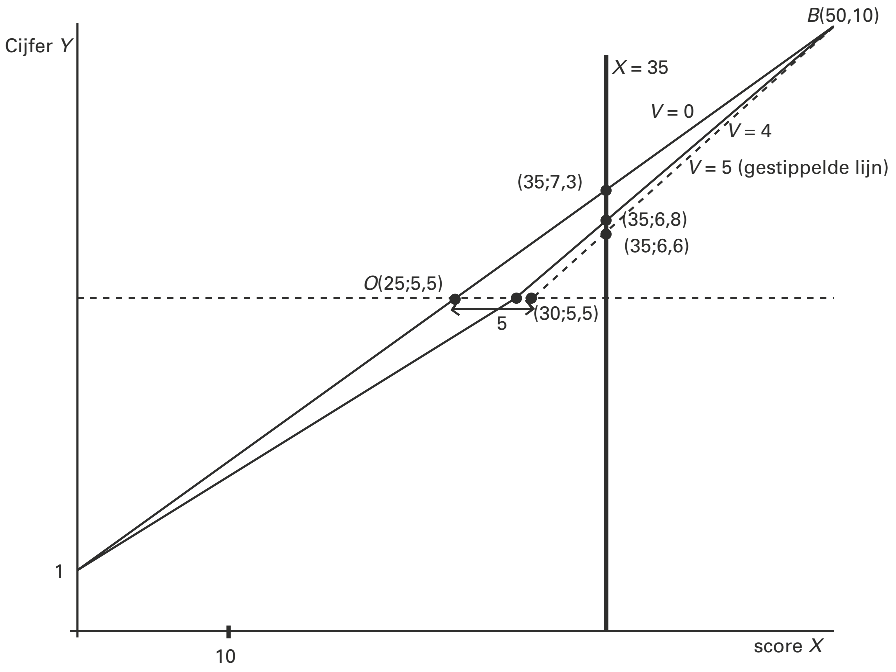


8 *eerste manier, met behulp van de grafiek:*
De lijn $V = 4$ is al getekend in de figuur.
De lijn $V = 0$ gaat door de punten (0,1) en (50,10).
Uit de grafiek aflezen bij $X = 35$ en lijn $V = 4$ geeft $Y = 6{,}8$ en $X = 35$ en $V = 0$ geeft $Y = 7{,}3$
Dus Y moet liggen tussen 6,8 en 7,3 dus $Y = 6{,}6$ is niet mogelijk.

tweede manier, met behulp van de grafiek:
Teken in de grafiek het punt *D*(35; 6,6).
Dit punt ligt niet tussen $V = 0$ en $V = 4$ dus $Y = 6{,}6$ is niet mogelijk.
$Y = 6{,}6$ en $X = 35$ hoort bij $V = 5$ (zie grafiek).

derde manier, met een berekening:
Lijn $V = 0$ gaat door (0, 1) en (50, 10) dus $Y = 0{,}18X + 1$.
Als $X = 35$ en $V = 0$ geldt $Y = 7{,}3$ (zie onderdeel 6).
Lijn $V = 4$ gaat door (29; 5,5) en (50, 10) dus r.c. $= a = \frac{10-5{,}5}{50-20} = 0{,}214$
$Y = 0{,}214X + b$ gaat door (50,10) dus $10 = 0{,}214 \cdot 50 + b$, dus $b = -0{,}7$, dus
$Y = 0{,}214X - 0{,}7$ als $X = 35$ geldt $Y = 6{,}8$
Y moet liggen tussen 6,8 en 7,3, dus $Y = 6{,}6$ kan niet.

© ThiemeMeulenhoff



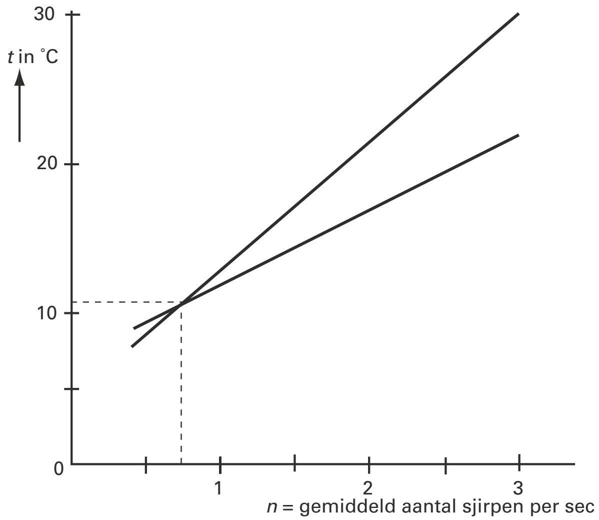
Veldkrekels

9 Gemiddeld aantal sjirpen per seconde is 2,4.
Volgens Duijm is de temperatuur gelijk aan het gemiddelde aantal sjirpen per *vijf* seconden + 7.
Dit geeft als temperatuur 2,4 · 5 + 7 = 19 °C.
Volgens Dekkers is de temperatuur gelijk aan het gemiddelde aantal sjirpen per minuut – 40, daarna de uitkomst delen door 7 en daar weer 10 bij optellen.
Omdat 1 minuut = 60 seconden geeft dit als temperatuur $\frac{2{,}4 \cdot 60 - 40}{7} + 10 = 25$ °C.
De uitkomsten verschillen ongeveer 6 graden Celsius.

10 De formule voor de temperatuur van M. Duijm is $t = 5n + 7$

© ThiemeMeulenhoff

11 *eerste manier, met de grafiek:*
Teken in de grafiek ook de grafiek voor de temperatuurformule van Duijm: $t = 5n + 7$.
Neem bijvoorbeeld de punten (1, 12) en (3, 22).
Het snijpunt ligt bij $t \approx 10{,}8$ °C.

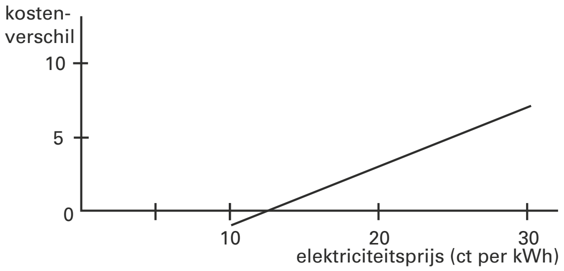


tweede manier met de grafische rekenmachine:
De formule voor Dekkers is
$t = \frac{60n - 40}{7} + 10$
Voer in de formules
$y = 5x + 7$ en $y = \frac{60x - 40}{7} + 10$
Bepaal met de tabel of de grafiek het snijpunt $x = 0{,}76$ en $y = 10{,}8$. Dus $y = t = 10{,}8$ °C.

Zonneboiler

12 Bij een elektriciteitsprijs (ep) van 25 ct per kwh is het verschil 5 ct.
Bij een ep van 20 ct per kwh is het verschil 3 ct.
Bij een verhoging van de ep met 5 ct neemt het verschil in de kosten met 2 ct toe, oftewel bij een verhoging met 2,5 ct neemt het verschil met 1 ct toe en bij een verhoging met 12,5 ct neemt het verschil met 5 ct toe.
Dus bij een ep van 25 + 12,5 = 37,5 ct is het verschil 5 + 5 = 10 ct. Er is een kostenvoordeel van 10 ct per kwh voor een zonneboiler (in vergelijking met een elektrische boiler).

13 Als de ep 12,5 ct is, dan is het kostenverschil 0. Als de ep met 5 toeneemt, dan neemt het kostenverschil met 2 toe (zie onderdeel 12).
De grafiek is een rechte lijn door o.a. (12,5; 0), (20, 3), (25, 5) vanaf (10, –1) t/m (30, 7).



© ThiemeMeulenhoff

14 ep nachttarief = 15 ct per kwh
ep dagtarief = 25 ct per kwh
75% nachttarief en 25% dagtarief geeft een gemiddelde prijs van
$0{,}75 \cdot 15 + 0{,}25 \cdot 25 = 11{,}25 + 6{,}25 = 17{,}5$ cent per kwh.
Het kostenverschil is in dit geval 2 ct per kwh (lees dit af uit figuur 6 of uit de grafiek bij de uitwerking van onderdeel 13).

15 2250 kwh nodig.
Het rendement van de boiler is 90% betekent dat 90% van de geleverde energie nuttig gebruikt wordt. Totaal moet er zoveel energie geleverd worden
dat 90% gelijk is aan 2250 kwh, oftewel er moet $\frac{2250}{90} \cdot 100 = 2500$ kwh
geleverd en dus betaald worden.
De elektriciteitsprijs = p euro per kwh, 2500 kwh kosten dan $2500 \cdot p = 2500p$.
De vaste kosten zijn € 155,-.
Totale jaarlijkse kosten: $TJK = 155 + 2500p$ (in euro).

Auto's en kosten

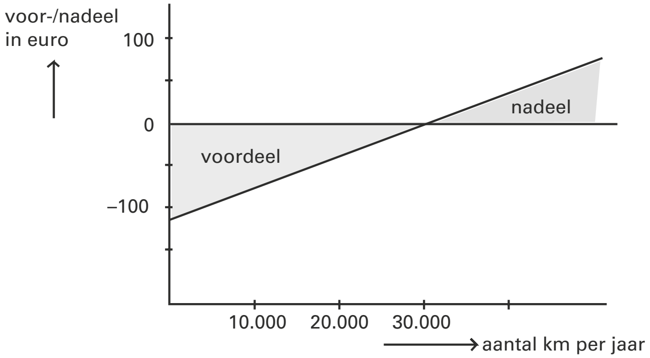
16 *Er wordt uitgegaan van een verbruik van 1 op 12,5.*
Met 1 liter benzine rijdt de automobilist 12,5 kilometer.
Een automobilist rijdt 40 000 kilometer per jaar.
Het benzineverbruik is $\frac{40\,000}{12{,}5} = 3200$ liter.
De benzine wordt 15 cent per liter duurder.
De extra kosten voor benzine zijn $3200 \cdot$ € $0{,}15 =$ € 480,-.
Het voordeel door verlaging van de wegenbelasting = € 143,-.
Het nadeel voor de automobilist met 40 000 km per jaar = 480 – 143 = € 337,-

17 *Er is geen voordeel en nadeel als de extra kosten voor benzine gelijk zijn aan de verlaging van de wegenbelasting (€ 143,-).*
De extra kosten voor benzine zijn € 0,15 per liter.
€ 143,- komt overeen met kosten voor $\frac{143}{0{,}15} = 953{,}3$ liter benzine.
Met 953,3 liter en een auto die 1 op 12,5 rijdt kan er $953{,}3 \cdot 12{,}5 = 11\,916$ kilometer gereden worden.

© ThiemeMeulenhoff

18 *De grafiek wordt een rechte lijn. Het is voldoende om twee punten van de grafiek te bepalen.*
De wegenbelasting gaat € 114,- omlaag.
De diesel wordt € 0,06 per liter duurder.
De dieselauto rijdt 1 op 16; met 1 liter diesel wordt 16 kilometer gereden.
Als een auto 0 km per jaar rijdt is het voordeel € 114,-. De grafiek gaat door (0, –114).
Als een auto bijvoorbeeld 16 000 km per jaar rijdt, is het verbruik 1000 liter en zijn de extra kosten voor benzine $1000 \cdot$ € $0{,}06 =$ € 60,-.
Het totale voordeel is dan 114 – 60 = € 54,-.
De grafiek gaat door (16 000, –54).

Er is geen voordeel en nadeel als de extra kosten voor diesel € 114,- zijn.
€ 114,- komt overeen met extra kosten voor $\frac{114}{0{,}06} = 1900$ liter diesel.
Met 1900 liter en een auto die 1 op 16 rijdt kan er $1900 \cdot 16 = 30\,400$ kilometer gereden worden. De grafiek gaat door (30 400, 0).
Eventueel extra punten berekenen met voor-/nadeel = $\frac{\text{aantal kilometer}}{16} \cdot 0{,}06 - 114$.



Woningvoorraad

19 *In 1962 zijn er 3 miljoen woningen en in 1992 zijn er 6 miljoen.*
Er is lineaire groei. In de formule is t in jaren en t = 0 is 1962 en W is aantal in miljoenen.

eerste manier:
In 1962 $t = 0$ zijn er 3 miljoen woningen, dus $b = 3$
Van 1962 tot 1992 is 30 jaar.
In 30 jaar tijd is de lineaire groei 3 miljoen, dus per jaar is de groei 0,1 miljoen dus $a = 0{,}1$.

tweede manier:
De lijn gaat door (0, 3) en (30, 6) dus de richtingscoëfficiënt is $a = \frac{6-3}{30} = 0{,}1$ en $b = 3$.

© ThiemeMeulenhoff

Mobiel bellen

20 *Prepaid kost altijd 15 cent per minuut. Abonnement bestaat uit een vast bedrag per maand en boven de 75 belminuten 23 cent per belminuut. Let op: Prepaid is goedkoper bij weinig belminuten, maar ook bij veel belminuten.*
Bij Prepaid en bij abonnement is er sprake van een lineaire groei.

eerste manier met rekenen:
Abonnement kost € 9,95 per maand inclusief 75 gratis belminuten, daarna kost elke belminuut € 0,23.

Voor € 9,95 kan oma $\frac{9,95}{0,15} \approx 66,3$ belminuten bellen met haar prepaid.
Dus tot en met 66 belminuten is de prepaid goedkoper.

Bij 75 belminuten kost de prepaid 0,15 · 75 = € 11,25 en het abonnement € 9,95.
Het abonnement is dan € 11,25 – € 9,95 = € 1,30 goedkoper
Voor elke belminuut na de 75 minuten is de prepaid € 0,23 – € 0,15 = € 0,08 goedkoper.

De kosten zijn gelijk bij $75 + \frac{1,30}{0,08} = 75 + 16,25 = 91,25$ belminuten.
Dus prepaid is weer goedkoper vanaf 92 belminuten.
Conclusie tot en met 66 belminuten en vanaf 92 belminuten per maand is prepaid goedkoper.

tweede manier met de formules;
Noem het aantal belminuten a en de kosten per maand K.
Prepaid kost altijd € 0,15 per belminuut.
De formule wordt dan $K_{prepaid} = 0,15 \cdot a$
Abonnement kost € 9,95 per maand inclusief 75 gratis belminuten, daarna kost elke belminuut € 0,23.
De formules worden dan
$K_{abonnement} = 9,95$ tot en met 75 belminuten en
$K_{abonnement} = 9,95 + 0,23 \cdot (a - 75)$ boven de 75 belminuten.
Gelijke kosten als

$0,15 \cdot a = 9,95$ dus als $a = \frac{9,95}{0,15} \approx 66,3$ belminuten.

$0,15 \cdot a = 9,95 + 0,23 \cdot (a - 75)$ dus
$0,15 \cdot a = 9,95 + 0,23 \cdot a - 17,25$
$0,08 \cdot a = 7,3$ dus bij $a = 91,25$ belminuten.
Conclusie: tot en met 66 belminuten en vanaf 92 belminuten per maand is prepaid goedkoper.

Kinderalimentatie

21 *Er is een lineair verband tussen de alimentatie A en het gezinsinkomen G, dus maak gebruik van de waarden uit de tabel bij twee kinderen.*

eerste manier, berekening met stijging per 10:
Neem bijvoorbeeld $G = 3500$, $A = 841$ en $G = 4000$ en $A = 977$.
Als G stijgt met 500 euro dan stijgt A met 977 – 841 = 136 euro,
dus als G stijgt met 100 euro dan stijgt A met 136 : 5 = 27,20 euro,
dus als G stijgt met 10 euro dan stijgt A met 27,20 : 10 = 2,72 euro
Als G stijgt met 820 euro (van 4000 tot 4820) dan stijgt A met
8 · 27,20 + 2 · 2,72 = 223,04.
Dus A wordt 977 + 223,04 = 1200,04 euro.

tweede manier met een tabel:
Neem bijvoorbeeld $G = 3500$, $A = 841$ en $G = 4000$ en $A = 977$.
Gevraagd wordt naar A als $G = 4820$, dus bereken eerst $\Delta G = 820$

ΔG	500	100	10	820
ΔA	136	27,2	2,72	2,72 · 82 = 223,04

Dus A wordt 977 + 223,04 = 1200,04 euro

derde manier met rechte lijn $A = r \cdot G + b$:
Neem bijvoorbeeld $G = 3500$, $A = 841$ en $G = 4000$ en $A = 977$.
r.c. = $\frac{977 - 841}{4000 - 3500} = 0,272$
$G = 4000$ en $A = 977$ invullen in $A = 0,272 \cdot G + b$ geeft $977 = 0,272 \cdot 4000 + b$,
dus $b = -111$
$G = 4820$ invullen in $A = 0,272 \cdot G - 111 = 0,272 \cdot 4820 - 111 = 1200,04$

22 *Er is een lineair verband tussen de alimentatie A en het gezinsinkomen G, dus maak gebruik van de waarden uit de tabel bij drie kinderen. De toename per euro gezinsinkomen boven de 1500 euro wordt gevraagd.*
Neem bijvoorbeeld $G = 1500$, $A = 359$ en $G = 2000$ en $A = 533$.
Als G stijgt met 500 euro dan stijgt A met 533 – 359 = 174 euro.
Als G stijgt met 1 euro dan stijgt A met 174 : 500 = 0,348 euro en dit is ongeveer 35 cent.
Conclusie: de jurist heeft gelijk.

Vogeltrek

23 *Houd rekening met het aantal dagen in de maanden.*
2020 is 40 jaar na 1980.
3 dagen per 10 jaar, dus de gierzwaluw keert na 40 jaar 4 · 3 = 12 dagen eerder terug.
1 dag voor 2 mei is 1 mei, 2 dagen voor 2 mei is 30 april (*let op: april heeft 30* dagen).
Zo doortellen: 29 april (3 dagen voor 2 mei), 28, 27, 26, 25, 24, 23, 22, 21, 20 april (12 dagen voor 2 mei).
Conclusie: op 20 april 2020 keert de gierzwaluw terug.

24 *Lineaire formule dus $A = a \cdot t + b$*
$t = 0$ (is 1980) en t is in jaren, A is het nummer van de dag.
startwaarde b
De startwaarde bij $t = 0$ (1980) is het dag nummer $A = 122$
richtingscoëfficiënt a
Per 10 jaar is er een afname van 3 dagen, dus per jaar is de afname 0,3,
dus richtingscoëfficiënt is $-\frac{3}{10} = -0,3$
formule
De formule is $A = -\frac{3}{10}t + 122$ of $A = 122 - \frac{3}{10}t$ of $A = -0,3 \cdot t + 122$

25 *eerste manier kijk per jaar hoeveel de verblijfsduur langer wordt:*
Per jaar is de aankomst 0,3 dag eerder.
Per jaar is het vertrek is 0,06 dag eerder (per 10 jaar 0,6 eerder).
Per jaar wordt de verblijfsduur dus 0,3 – 0,06 = 0,24 dag langer.
In 1980 is de verblijfsduur 100 dagen. De tussenliggende periode moet 15 dagen langer worden.
Per jaar wordt de verblijfsduur 0,24 dag langer, dus om 15 dagen langer te worden is er

$t = \frac{15}{0{,}24} = 62{,}5$ jaar nodig (na 1980).

Conclusie: In 2043 (1980 + 62,5) verblijft de gierzwaluw voor het eerst meer dan 115 dagen in Engeland.

tweede manier, bepaal een formule voor de datum van aankomst en voor de datum van vertrek:
formule voor de aankomst
De formule voor aankomst is $A = -0{,}3 \cdot t + 122$ met $t = 0$ is 1980.

formule V voor dag van vertrek
De aankomst datum is dagnummer 122 en de verblijfsduur is 100 dagen, dus het dagnummer van vertrek is 122 + 100 = 222. Dit is de startwaarde.
Per 10 jaar vertrekt de gierzwaluw 0,6 dag eerder. Per 10 jaar is er een afname van 0,6 dagen, dus per jaar is de afname 0,06, dus de richtingscoëfficiënt is –0,06
De formule voor dag van vertrek is $V = 222 - 0{,}06 \cdot t$
slotberekening
Het verschil tussen A en V moet 115 zijn, dus er geldt
$V - A = (222 - 0{,}06 \cdot t) - (122 - 0{,}3 \cdot t) = 115$.

$100 + 0{,}24 \cdot t = 115$ dus $0{,}24 \cdot t = 15$ dus $t = \frac{15}{0{,}24} = 62{,}5$ jaar met $t = 0$ is 1980

Conclusie: in 2043 (1980 + 62,5) verblijft de gierzwaluw voor het eerst meer dan 115 dagen in Engeland.

© ThiemeMeulenhoff

5 Exponentiële verbanden

Defensiebegroting

Dwars tegen de verkiezingsleuzen in kondigde de Amerikaanse minister van defensie, Richard Cheney, aan dat hij het komende begrotingsjaar op defensie 15 miljard dollar wil bezuinigen.
Dat is 5 procent van de defensiebegroting van 1989.
....
Het Amerikaanse weekblad Business week liet de economische gevolgen van deze diep ingrijpende bezuinigingen doorrekenen, uitgaande van een bezuiniging van 5 procent per jaar op defensie.

(fragmenten uit een artikel over ontwapening in de Volkskrant van 9 december 1989)

Het is uit bovenstaande tekst niet duidelijk wat *Business week* bedoelt met een bezuiniging van 5% per jaar op defensie.
De volgende twee opvattingen zijn mogelijk:
(a) de defensiebegroting wordt, te beginnen met 1990, elk jaar verminderd met 5% van de begroting van 1989;
(b) de defensiebegroting wordt elk jaar verminderd met 5% van de begroting van het *voorafgaande* jaar.
Dat maakt wel degelijk verschil.

1 Zoek voor beide opvattingen uit hoeveel jaar het duurt voor de defensiebegroting gehalveerd is ten opzichte van de begroting van 1989.

2 Geef voor beide opvattingen een formule voor de defensiebegroting (in miljard dollar) afhankelijk van het aantal jaren ná 1989.

Sparen, sparen of sparen

Nederland is een echt spaarland. Jaarlijks worden er miljarden euro's gestort op spaarrekeningen.
Er zijn verschillende soorten spaarrekeningen. In deze opgave bekijken we er drie: de groeirekening, de depositorekening en de renteklimrekening.
We storten op elk van de drie spaarrekeningen een bedrag van 10 000 euro dat voor een periode van 10 jaar op de spaarrekening blijft staan.

Groeirekening
De groeirekening is de bekendste soort. Het rentepercentage op deze rekening is 3,5% per jaar. Het is een 'rente op rente'-rekening: na een jaar wordt de rente bijgeschreven op de rekening, zodat het volgende jaar rente wordt berekend over een hoger bedrag, enzovoort.
Na elk jaar wordt het bedrag op de rekening dus hoger. Het bedrag G dat na t jaar op de groeirekening staat, kun je berekenen met de formule:

$G = 10\,000 \cdot 1{,}035^t$

© ThiemeMeulenhoff

Het bedrag op de groeirekening is na 10 jaar nog niet verdubbeld. Maar als je de rekening nog langer laat doorlopen, komt er een jaar dat het bedrag op de rekening voor het eerst twee keer zo hoog is geworden. Het bedrag is dan zelfs nog iets hoger dan 20 000 euro.

3 Bereken na hoeveel jaar dat is.

Depositorekening

De depositorekening is een spaarrekening met een rentepercentage van 4,0% per jaar. De rente over elk jaar is 400 euro. Dat bedrag wordt steeds bijgeschreven op een aparte betaalrekening. Op de betaalrekening krijg je geen rente, zodat het bedrag op de betaalrekening lineair toeneemt.

Een rente van 4,0% lijkt gunstiger dan een rente van 3,5%. Toch heb je na tien jaar bij de depositorekening in totaal minder rente gekregen dan bij de groeirekening.
Een bank introduceert een nieuwe depositorekening die in tien jaar evenveel rente oplevert als de groeirekening.

4 Bereken het rentepercentage per jaar van die nieuwe depositorekening. Geef je antwoord in één decimaal.

Renteklimrekening

De renteklimrekening is een soort depositorekening. Ook hier wordt jaarlijks de rente bijgeschreven op een aparte betaalrekening die geen rente oplevert.
Bij de renteklimrekening wordt het rentepercentage elk jaar hoger.
In tabel 1 kun je aflezen welke bedragen er na *t* jaar sparen op de renteklimrekening *R* en op de betaalrekening *B* staan.

tabel 1

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000	10 000
B	0	300	615	950	1310	1700	2130	2615	3165	3775	4475

In de onvolledige tabel 2 staan de rentepercentages voor het *t*-de jaar.

tabel 2

t-de jaar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
rentepercentage	3,00	3,15	3,35	3,60	3,90	4,30				

5 Bereken het rentepercentage voor het 7^e jaar. Geef je antwoord in twee decimalen.

De renteklimrekening geeft in tien jaar 4475 euro rente. Wat dit betreft is het de beste van de drie spaarrekeningen. De groeirekening is de op een na beste.

6 Bereken het rentepercentage per jaar dat een groeirekening moet hebben om in 10 jaar 4475 euro rente te geven. Geef je antwoord in twee decimalen.

© ThiemeMeulenhoff

Boekwaarde

Een kopieerapparaat is een jaar na aanschaf minder waard dan op het moment van aanschaf.
In de volgende jaren neemt de waarde nog verder af.
De waarde van het kopieerapparaat op zeker moment noemen we de *boekwaarde* van het apparaat en de waardedaling wordt de *afschrijving* genoemd. Er zijn verschillende methoden om de boekwaarde te berekenen. Die methoden leiden vaak tot verschillende boekwaarden. In deze opgave bekijken we er drie.

Een voetbalclub heeft een nieuw kopieerapparaat van € 10.000,- gekocht. Na 10 jaar heeft dit apparaat nog een waarde van € 1.000,-. Er zal dus in 10 jaar € 9.000,- moeten worden afgeschreven. In tabel 3 staan de boekwaarden (in euro's) bij aanschaf, na 5 jaar en na 10 jaar volgens drie methoden (I, II, III). De boekwaarde geven we aan met de letter *B*; *t* is de tijd (in jaren) vanaf het moment van aanschaf.

tabel 3

	Boekwaarde *B*		
tijdstip *t*	I	II	III
0	10 000	10 000	10 000
5	5500	3162	3455
10	1000	1000	1000

Bij methode I daalt de boekwaarde gelijkmatig. De boekwaarde *B* (in euro's) na *t* jaar kan berekend worden met de formule $B = 10\,000 - 900t$.

7 Leg uit hoe het getal –900 in deze formule met behulp van de tabel berekend kan worden.

Bij methode II wordt de boekwaarde ieder jaar met een vaste groeifactor vermenigvuldigd.
De boekwaarde kan op elk moment (dus ook gedurende het jaar) berekend worden met de formule $B = 10\,000 \times 0{,}7943^t$.

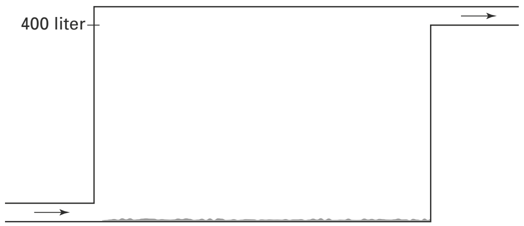
8 Onderzoek na hoeveel tijd de boekwaarde volgens deze methode de helft is van de nieuwprijs van € 10000,-.

© ThiemeMeulenhoff

Concentratie van vloeistoffen

Een vloeistof wordt bewaard in een vat. Na het gebruik van de vloeistof is het vat nooit helemáál leeg. Om het vat weer te kunnen gebruiken, moet het eerst worden schoongespoeld.
In figuur 1 zie je hoe dat gedaan wordt. Onderin het vat zit nog een restant vloeistof. Via de pijp linksonder wordt een spoelmiddel in het vat gepompt. Het restant vloeistof vermengt zich met het spoelmiddel.
Na een tijdje is het vat vol. Maar het erin pompen van het spoelmiddel gaat door en zo stromen spoelmiddel en vloeistof het vat weer uit via de uitgang rechtsboven.
Het spoelen gaat door tot er (vrijwel) niets meer over is van de oorspronkelijke vloeistof.

figuur 1



Het vat van figuur 1 heeft een inhoud van 400 liter. Onderin zit nog 0,8 liter vloeistof en daarin zit 20 000 mg van een chemische stof.
Het spoelmiddel wordt met 25 liter per minuut in het vat gepompt.
Onder de *concentratie C* wordt verstaan: de hoeveelheid chemische stof in milligram per liter vloeistof.
Tijdens het vollopen van het vat geldt voor C de formule:

$$C = \frac{20\,000}{0{,}8 + 25s}$$

Hierin is s de tijd in minuten. Op $s = 0$ begint het pompen van het spoelmiddel in het vat. Deze formule geldt tot het vat vol is, dus tot het moment dat het uitstromen begint.

9 Leg uit waarom deze formule juist is.

Als het vat vol is, stroomt er evenveel het vat uit als het vat in. De concentratie van de chemische stof neemt nu exponentieel af.
We noemen de tijd in minuten t. Op $t = 0$ is het vat vol en begint het uitstromen.
Op $t = 0$ is de 20 000 mg chemische stof inmiddels opgelost in 400 liter vloeistof. Daardoor is de concentratie op dat tijdstip nog maar 50 mg per liter.

In tabel 4 zie je de concentratie C van de chemische stof voor enkele waarden van t.

tabel 4

t (in minuten)	0	4	8	12
C (in milligram per liter)	50,00	38,94	30,32	23,61

10 Bereken de groeifactor per minuut van dit exponentiële proces. Geef je antwoord in vier decimalen.

© ThiemeMeulenhoff

Een maand later moet het vat opnieuw worden schoongespoeld. Op de bodem van het vat bevindt zich 10 000 mg droge chemische stof. Verder is het vat leeg.
Men pompt met een snelheid van 25 liter per minuut het spoelmiddel in het vat.
De chemische stof vermengt zich met het spoelmiddel. Als het vat vol is, gaat men door met pompen tot de concentratie uiteindelijk nog maar 1 milligram per liter is.
Voor de concentratie C van het volle vat geldt de formule:

$$C = 25 \cdot 0{,}94^t$$

Hierin is t de tijd in minuten, gerekend vanaf het begin van het uitstromen.

11 Hoeveel minuten duurt het pompen in totaal tot de concentratie 1 milligram per liter is? Licht je werkwijze toe en geef je antwoord in gehele minuten.

Diersoorten

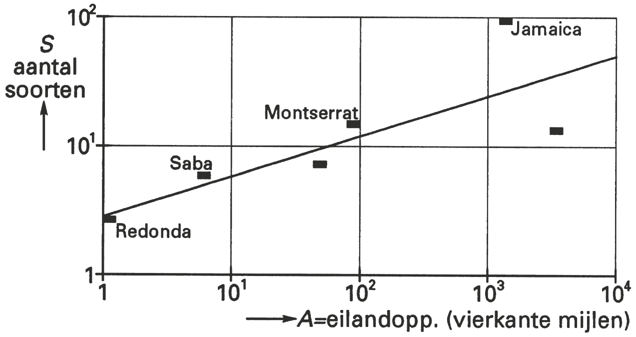
Het lijkt aannemelijk dat er een verband bestaat tussen de oppervlakte van een gebied en het aantal verschillende diersoorten dat in dat gebied voorkomt. Een theorie hierover stelt dat het aantal verschillende diersoorten op een eiland in een bepaalde klimaatzone alleen afhankelijk is van de oppervlakte van het eiland.
In deze opgave kijken we naar de verschillende soorten reptielen op eilanden in het Caraïbisch gebied.

Neushoornleguaan (Haïti)

Onderzoekers telden op vele eilanden het aantal verschillende soorten reptielen (S).
In figuur 2 zijn de gegevens van enkele eilanden weergegeven.

© ThiemeMeulenhoff

figuur 2



Volgens de theorie is het verband tussen de oppervlakte A van een eiland (in vierkante mijlen) en het aantal soorten reptielen S op dat eiland te beschrijven met de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$.
De lijn in figuur 2 is de grafiek die bij deze formule behoort.

Op het eiland Jamaica zijn meer soorten reptielen aangetroffen dan op grond van de theorie (de formule) verwacht mag worden.

12 Hoeveel soorten reptielen zou een even groot eiland volgens de theorie hebben? Licht je antwoord toe.

Binnen de theorie geldt als ruwe regel:
Bij een 10 keer zo groot eiland vinden we 2 keer zoveel diersoorten.

13 Laat zien dat dit uit de formule volgt.

Op een groot eiland worden veel verschillende soorten reptielen met uitsterven bedreigd.
Men wil maatregelen nemen om de natuur beter te beschermen. Daarbij moet er een keuze worden gemaakt uit twee mogelijkheden:

a. Oprichting van 1 groot natuurreservaat met een oppervlakte van 400 vierkante mijlen.
b. Oprichting van 2 kleinere reservaten, elk met een oppervlakte van 200 vierkante mijlen.

Dergelijke natuurreservaten liggen geïsoleerd in de bewoonde wereld en kunnen als ‘eilanden’ beschouwd worden.

Voor het schatten van het aantal soorten reptielen dat in zo’n reservaat zal voorkomen kan de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ gebruikt worden.
Of voor a. of b. gekozen wordt, is mede afhankelijk van het aantal soorten dat de twee kleinere reservaten gemeen zullen hebben. Men neemt aan dat er 8 soorten reptielen zijn die zowel in het ene als het andere kleine reservaat zullen voorkomen.

Men wil de mogelijkheid kiezen waarbij in totaal zoveel mogelijk verschillende soorten reptielen zullen voorkomen.

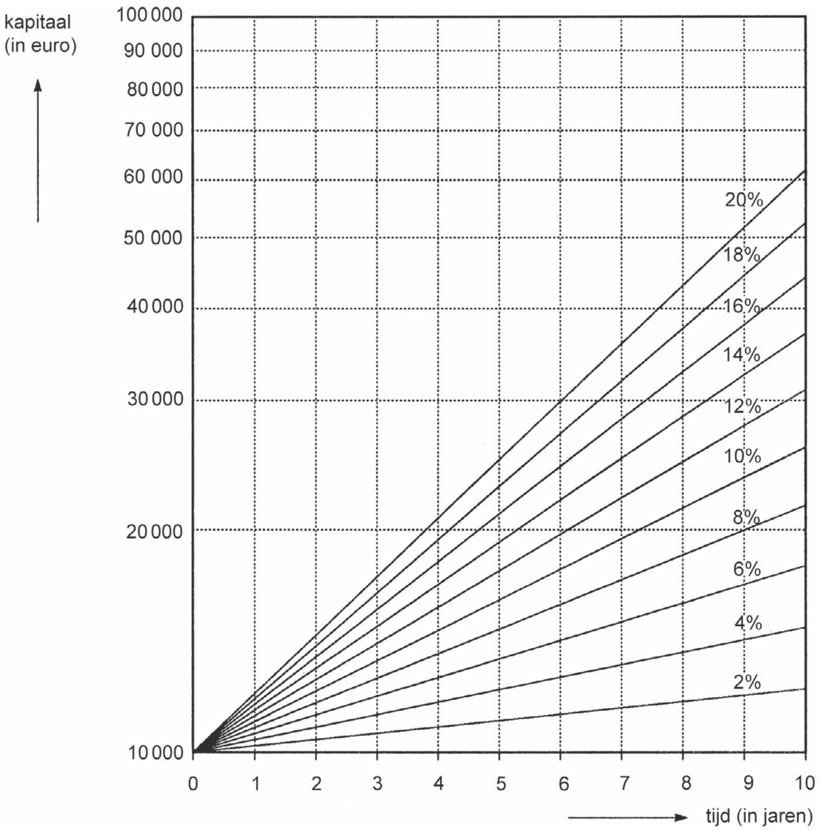
14 Welke van de twee mogelijkheden zal men kiezen? Licht je antwoord toe.

© ThiemeMeulenhoff

Beleggen

Na een grote en een kleine beurscrisis is de belegger ‘risicobewuster’ geworden. Aandelen leveren weliswaar een hoger rendement dan een spaarrekening, maar ze zijn ook een stuk riskanter. Onder rendement wordt hier verstaan de procentuele toename van het belegde kapitaal per jaar.
In figuur 3 zie je een bundel grafieken. Elke grafiek laat de groei van een kapitaal van € 10.000 zien bij een vast rentepercentage.
Op de verticale as is een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

figuur 3



15 Lees uit figuur 3 af na hoeveel jaar het kapitaal verdubbeld is bij een rendement van 8% per jaar.

Iemand belegt een kapitaal van € 10000 gedurende 10 jaar.
Stel dat hij de eerste 5 jaar een rendement van 14% (per jaar) behaalt, en de daarop volgende 5 jaar 4% (per jaar).

16 Geef in figuur 3 aan hoe de grafiek van de groei van het kapitaal in dit geval verloopt.

© ThiemeMeulenhoff

Het HABOG

Kernenergie levert weinig afval op, maar het is wel afval dat speciale aandacht vereist. Het is namelijk radioactief en het blijft nog tientallen jaren warmte afgeven. In 2003 is in Zeeland een gebouw geopend waar de komende honderd jaar kernafval zal worden opgeslagen. Het gebouw heet HABOG, Hoogradioactief Afval Behandelings- en Opslag Gebouw. In het HABOG wordt het afval van de kerncentrale van Borssele opgeslagen.
Over honderd jaar zijn de radioactiviteit en de warmte van het afval zo veel afgenomen dat het afval op een andere plaats kan worden opgeslagen.

Het afval uit Borssele bestaat jaarlijks uit zes glasblokken met hoogradioactief afval. In het begin geeft zo'n blok evenveel warmte af als een kachel van 1800 Watt. Na 100 jaar is de warmteafgifte verminderd tot die van drie gloeilampen, ofwel 180 Watt. De warmteafgifte neemt exponentieel af.

17 Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte per jaar afneemt. Rond je antwoord af op twee decimalen.

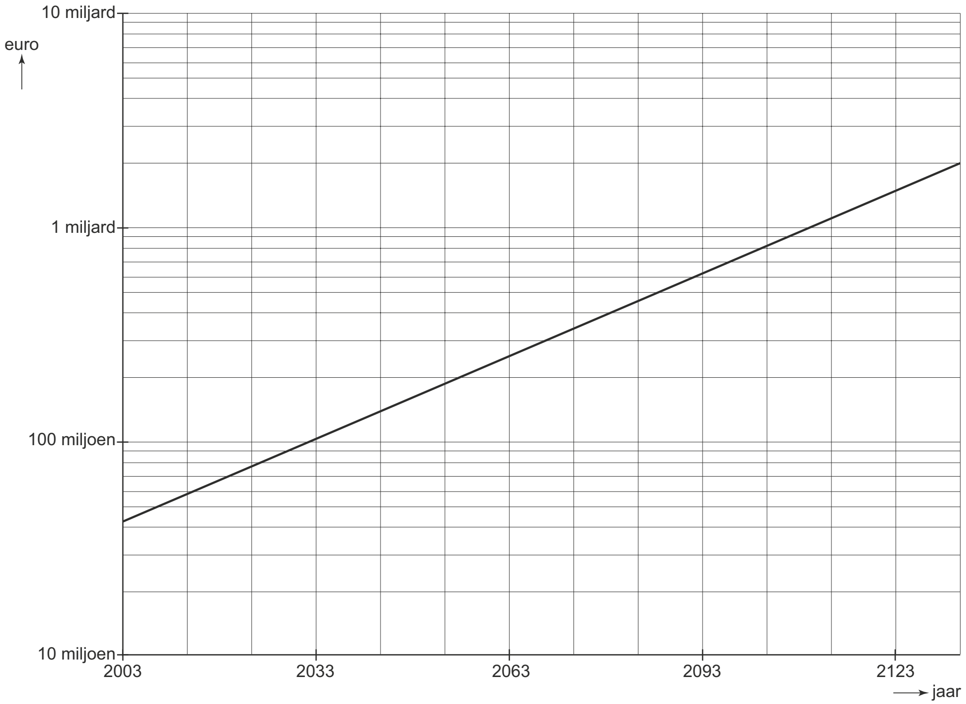
Het gebouw is knaloranje geverfd. In grote groene letters zijn er beroemde formules van Einstein en Planck op aangebracht (zie foto). Elke tien jaar wordt het gebouw opnieuw geverfd, telkens in een iets lichtere tint om de afname van de warmteafgifte mee aan te geven.
Je mag er in de rest van de opgave van uitgaan dat de warmteafgifte met 2,3% per jaar afneemt.

18 Bereken het percentage waarmee de warmteafgifte in een periode van tien jaar afneemt. Rond je antwoord af op één decimaal.

19 Bereken na hoeveel jaar de warmteafgifte nog maar de helft is van de oorspronkelijke hoeveelheid. Rond je antwoord af op één decimaal.

Er wordt nu al geld gereserveerd om over meer dan honderd jaar het afval verder te kunnen verwerken. Daartoe is in het jaar 2003 een bedrag van 43 miljoen euro op een spaarrekening gezet.
In de grafiek van figuur 4 zie je hoe men verwacht dat dit bedrag zal toenemen. De verticale as heeft een logaritmische schaalverdeling.

figuur 4



De grafiek is een rechte lijn. Dit betekent dat men uitgegaan is van een vast rentepercentage per jaar gedurende de gehele looptijd.

20 Bereken dat percentage.

CBS-cijfers

Hieronder tref je een citaat aan uit het dagblad Trouw van 29 april 2010:

Deze week bleek dat het verbruik van duurzame energie vorig jaar in Nederland is gestegen van 3,4% naar 4% van het totale energiegebruik.
Dit is veel te weinig om het doel van 20% in 2020 te halen, reageerde Liesbeth van Tongeren, die op de kandidatenlijst voor de Tweede Kamer van Groen Links staat.
Welnee, twittert PvdA-kamerlid Diederik Samsom: "De CBS-cijfers zijn hoopvol, de laatste twee jaar is het aandeel gegroeid met 40%. In dat tempo halen we het doel in 2020."
Samsom maakt geen rekenfout bij zijn verdediging van het beleid. In 2007 lag het aandeel immers nog op 2,8%. Maar als het aandeel duurzame energie vanaf nu elk jaar met 0,6 procentpunt stijgt halen we de doelen niet, zegt van Tongeren en ook daar is geen speld tussen te krijgen.

21 Laat met een berekening zien dat de door Samsom genoemde 40% in de laatste twee jaar zelfs nog te laag is.

In het stukje spreekt Van Tongeren over een stijging met 0,6 procentpunt, dit is bijvoorbeeld de stijging van 2,8% (het percentage in 2007) naar 3,4% (het percentage in 2008) of van 3,4% naar 4% (het percentage in 2009).
De discussie die hier beschreven wordt, is de discussie tussen lineaire en exponentiële groei. Mevrouw Van Tongeren gaat uit van lineaire groei van het aandeel duurzame energie in het totale energiegebruik.

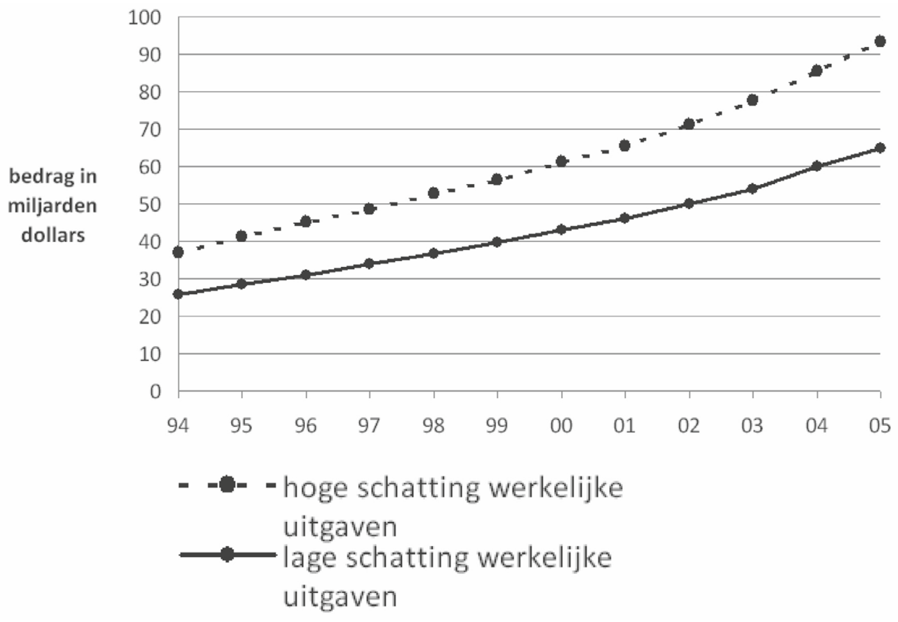
22 Stel een formule op waarmee je volgens de aanname van mevrouw Van Tongeren kunt berekenen hoeveel procent van het totale energiegebruik aan duurzame energie verbruikt wordt en bereken met deze formule hoe groot het percentage duurzame energie is in 2020.

Meneer Samsom gaat uit van exponentiële groei.
23 Stel een formule op waarmee je volgens de aanname van meneer Samsom (40% groei in 2 jaar) kunt berekenen hoeveel procent van het totale energiegebruik aan duurzame energie verbruikt wordt en bereken met deze formule hoe groot het percentage duurzame energie is in 2020.

China’s defensie-uitgaven

China ontwikkelt zich in hoog tempo tot grootmacht, ook op het militaire vlak.
Het Pentagon, het Amerikaanse Ministerie van Defensie, houdt de Chinese defensie-uitgaven nauwlettend in de gaten. In figuur 5 staan de Chinese defensie-uitgaven volgens twee schattingen van het Pentagon, een hoge en een lage.

figuur 5



Zoals duidelijk te zien is in de figuur wordt het verschil tussen de hoge en de lage schatting steeds groter. In de toekomst zal dat verschil, als alles verloopt zoals tot nu toe, alleen maar nog groter zijn.

© ThiemeMeulenhoff

24 Onderzoek met behulp van de gegevens in de figuur in welk jaar de hoge schatting voor het eerst meer dan 80 miljard groter is dan de lage schatting.
Maak daarbij gebruik van exponentiële modellen.

Woei wordt waaide

We noemen werkwoorden regelmatig wanneer ze worden vervoegd als het werkwoord fietsen: **fietsen — fietste — gefietst**, of als het werkwoord huilen: **huilen — huilde — gehuild**. Er is een vaste uitgang voor de verleden tijd en het voltooid deelwoord. Wanneer een werkwoord bij de vervoeging verandering van klinkers (a, e, i, …) of medeklinkers (b, c, d, …) vertoont, spreken we van een onregelmatig werkwoord. Een voorbeeld hiervan is het werkwoord lopen, dat wordt vervoegd als **lopen — liep — gelopen**.
Veel werkwoorden die tegenwoordig regelmatig zijn, waren vroeger onregelmatig. Onregelmatige werkwoorden hebben namelijk de neiging in de loop der tijd regelmatig te worden. Denk maar aan het werkwoord waaien.
Sommige oudere mensen zeggen nog: ‘Gisteren woei het erg!’, terwijl vooral jongeren zeggen: ‘Gisteren waaide het erg!’

Wetenschappers hebben dit verschijnsel onderzocht voor Engelse werkwoorden.
Zij turfden het aantal onregelmatige werkwoorden in drie verschillende perioden.
Je begrijpt dat in het onderzoek alleen die werkwoorden betrokken zijn waarvan uit elke periode gegevens bekend waren.
Van de 177 onregelmatige werkwoorden in het Oudengels (800 na Christus) waren er in het Middelengels (1200 na Christus) 145 nog steeds onregelmatig, en in het moderne Engels (2000 na Christus) nog maar 98.

Er geldt bij benadering dat het aantal Engelse onregelmatige werkwoorden daalt volgens een exponentieel verband.
25 Bereken met behulp van de bovenstaande gegevens het afnamepercentage per 100 jaar.

In werkelijkheid zijn er natuurlijk meer onregelmatige werkwoorden dan alleen die werkwoorden van het onderzoek. We nemen aan dat bij benadering het volgende verband tussen het totaal aantal Engelse onregelmatige werkwoorden W en het jaartal t geldt:

$W = 432 \cdot 0{,}9995^t$

26 Bereken met behulp van dit verband in welk jaar het aantal Engelse onregelmatige werkwoorden nog maar 80 zal zijn.

In het moderne Engels (2000 na Christus, dus $t = 2000$) is slechts 3% van de werkwoorden onregelmatig.
27 Bereken met behulp van het verband het totaal aantal Engelse werkwoorden in het jaar 2000.

Het regelmatig worden van werkwoorden gebeurt sneller naarmate de woorden minder vaak worden gebruikt.
De wetenschappers hebben alle onderzochte onregelmatige werkwoorden in zes groepen ingedeeld. De meest gebruikte, **to be** en **to have**, zitten in groep 1 en de minst gebruikte zitten in groep 6.

© ThiemeMeulenhoff

In groep 3 blijkt het aantal werkwoorden in de periode 800 tot 2000 na Christus afgenomen te zijn van 37 tot 33. In deze groep 3 zijn de werkwoorden **to help**, **to reach**, **to walk** en **to work** regelmatig geworden. Ga ervan uit dat binnen deze groep het aantal werkwoorden bij benadering exponentieel afneemt met 0,01% per jaar.

28 Bereken hoeveel jaar het duurt tot het aantal werkwoorden in groep 3 gehalveerd is.

De onderzoekers onderzochten dit voor elke groep en leidden hieruit de volgende vuistregel af: wordt een onregelmatig werkwoord *n* keer zo vaak gebruikt, dan duurt het $\sqrt{n}$ keer zo lang totdat dit werkwoord regelmatig wordt.
Een onregelmatig werkwoord dat bijvoorbeeld 100 keer zo vaak gebruikt wordt als een ander onregelmatig werkwoord, zal er $\sqrt{100} = 10$ keer zo lang over doen om regelmatig te worden.

In Nederland heeft men uit stukken tekst van in totaal 100 miljoen woorden de 10 meest gebruikte Nederlandse werkwoorden gehaald. Zie de tabel. Het valt vrijwel direct op dat de eerste 9 onregelmatig zijn.

	werkwoord	frequentie
1	zijn	2 264 398
2	worden	946 623
3	hebben	872 661
4	kunnen	569 152
5	zullen	382 900
6	moeten	345 098
7	gaan	285 026
8	komen	267 532
9	zeggen	230 606
10	maken	214 280

Neem aan dat het Nederlandse werkwoord **komen** pas na 13 000 jaar regelmatig wordt, zoals men dat ook verwacht voor het Engelse werkwoord **to come**. Neem verder aan dat de vuistregel ook geldt voor de Nederlandse onregelmatige werkwoorden. Dan kun je met behulp van de tabel berekenen hoeveel jaar het duurt voor het werkwoord **worden** regelmatig wordt.

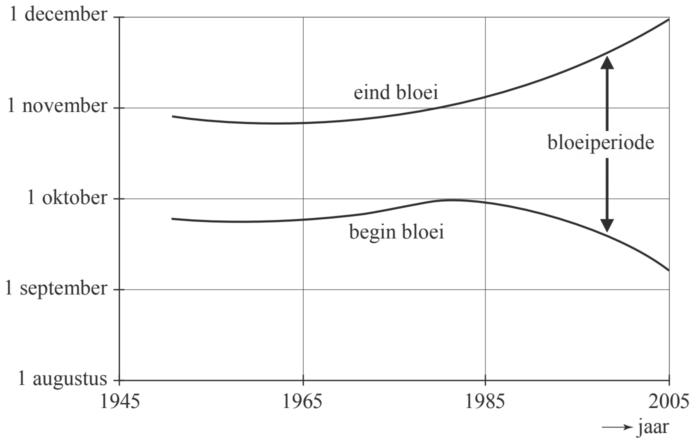
29 Bereken met behulp van de frequenties in de tabel hoeveel jaar het duurt voor het werkwoord **worden** regelmatig wordt.

© ThiemeMeulenhoff

Bloeiperiode

In Zuid-Engeland onderzoekt men sinds 1950 de lengte van de bloeiperiode van paddenstoelen.
Na vele duizenden waarnemingen bij 315 verschillende paddenstoelsoorten hebben Britse onderzoekers geconcludeerd dat er sinds 1980 een duidelijke verandering van de gemiddelde lengte van de bloeiperiode zichtbaar is.
Zie figuur 6.

figuur 6 **Bloeiperiode paddenstoelen**



Van 1950 tot 1980 bleef de lengte van de bloeiperiode ongeveer gelijk. Daarna is deze in de periode van 1980 tot 2005 toegenomen van 30 tot 83 dagen.
In deze opgave nemen we aan dat de lengte van de bloeiperiode sinds 1980 exponentieel toeneemt.

30 Bereken met de gegevens van 1980 en 2005 het jaarlijkse groeipercentage vanaf 1980 in twee decimalen nauwkeurig.

Vanaf 1980 is de lengte van de bloeiperiode bij benadering te beschrijven met de formule:

$B = 30 \cdot 1{,}042^{t}$

Hierin is *B* de lengte van de bloeiperiode in dagen en *t* de tijd in jaren vanaf 1980.

De lengte van de bloeiperiode is van 1980 tot 2005 ruimschoots verdubbeld.

31 Bereken in hoeveel jaar de bloeiperiode twee keer zo lang wordt.

© ThiemeMeulenhoff

Radioactieve stoffen

In ziekenhuizen wordt veel gebruikgemaakt van radioactieve stoffen.
Bij het radioactieve verval van deze stoffen komt straling vrij. Deze straling wordt onder andere gebruikt voor diagnose en behandeling van ziekten.
Patiënten krijgen een injectie met een geringe hoeveelheid radioactieve stof.
Daarna kijkt de arts met een speciale camera waar de stof zich in het lichaam concentreert.

Om een scan van de botten te maken, wordt een patiënt ingespoten met de radioactieve stof Technetium-99m (Tc-99m).
Tc-99m heeft een halveringstijd van 6 uur. Dat wil zeggen dat telkens na 6 uur de helft van de radioactieve stof verdwenen is. Deze halveringstijd is lang genoeg om het medische onderzoek uit te voeren en kort genoeg om de patiënt na het onderzoek niet in het ziekenhuis te hoeven houden.

32 Bereken hoeveel procent van de radioactieve stof Tc-99m 24 uur na toediening nog in het lichaam van de patiënt aanwezig is.

Vanwege de korte halveringstijd is het voor een ziekenhuis onmogelijk om Tc-99m in voorraad te hebben. In het ziekenhuis wordt hiervoor eenmaal per week een **technetiumkoe** afgeleverd. Zie de foto.
Deze 'koe' is eigenlijk een container met Molybdeen-99 (Mo-99). Tc-99m ontstaat bij het radioactieve verval van Mo-99, dat een veel langere halveringstijd heeft.
Uit de koe kan een week lang op elk gewenst moment Tc-99m worden 'gemolken'. Dit is voldoende voor vele tientallen patiënten.

Een container wordt gevuld met Mo-99. Het exponentiële radioactieve verval van Mo-99 is dusdanig dat na precies 7 dagen nog 17,3% van de stof over is.
Op grond van dit gegeven kun je vaststellen dat de hoeveelheid Mo-99 ieder uur met ongeveer 1,04% afneemt.

33 Laat met een berekening zien dat dit klopt.

34 Bereken met behulp van de genoemde 1,04% na hoeveel uur de hoeveelheid Mo-99 in de container gehalveerd is.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 5

1 (a) lineaire afname: elk jaar 5% minder en (b) exponentiële afname met 5%, dus de groeifactor is 0,95.

2 Een punt is te bepalen met: 15 miljard is 5% van de defensiebegroting in 1989.
(a) lineaire afname en (b) exponentiële afname.

3 Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

4 Bereken eerst het bedrag na 10 jaar op de spaarrekening met 3,5% rente. Het bedrag aan rente op de deposito rekening is elk jaar hetzelfde. Bedenk hoeveel dit bedrag per jaar is en welk rentepercentage hier bij hoort.

5 Gebruik de eerste tabel.

6 Start met 10 000 euro en na 10 jaar is er … euro. Exponentiële groei: bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.

7 Gebruik de tabel. De boekwaarde daalt gelijkmatig met … per 10 jaar dus dat is … per jaar.

8 Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.

9 $C = \frac{\text{hoeveelheid chemische stof in mg}}{\text{aantal liter}}$. Leg uit dat dit klopt met de formule.

10 Bepaal eerst de groeifactor per 4 minuten.

11 Er wordt gevraagd naar de totale tijd dat het pompen duurt tot $C = 1$, dus de tijd van het volpompen + de tijd van het uitstromen.

12 Lees uit de figuur af hoe groot Jamaica is en bepaal met behulp van de grafiek (de rechte lijn) het aantal soorten dat hier volgens de theorie bij hoort.

13 Vul in de formule in plaats van A tussen haakjes $10A$ in en werk de haakjes uit.
Maak gebruik van $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$. Alleen getallen invullen is geen bewijs.

14 Bereken voor beide mogelijkheden het aantal verschillende soorten.
Bedenk dat twee kleine reservaten 8 soorten gemeenschappelijk hebben.

15 Gebruik de figuur. Verdubbeling van 10 000 euro als, dus lees t af bij 20 000 euro.

16 Eerste vijf jaar 14%, de vijf jaar daarna 4%. Bedenk met welke lijn de grafiek evenwijdig loopt.

17 De warmteafgifte neemt exponentieel af. Bepaal eerst de groeifactor en dan het percentage.

18 Afname is 2,3% per jaar. Bereken achtereenvolgens de groeifactor per jaar, de groeifactor per 10 jaar en het gevraagde percentage.

19 Halvering: bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

20 Lees twee punten af en bepaal eerst de groeifactor.

21 Het gaat over de groei van twee jaar. Gebruik dus $\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \cdot 100\%$.

22 Lineaire groei, dus de formule is van de vorm $P = a \cdot t + b$

23 Exponentiële groei, dus de formule is van de vorm $P = b \cdot g^t$

24 Bereken voor elke schatting de groeifactor en bepaal per grafiek de formule: $B = b \cdot g^t$

25 Bereken eerst de groeifactor per 1200 jaar en daarna per 100 jaar.

© ThiemeMeulenhoff

26 Bepaal de vergelijking die opgelost moet worden.

27 Bepaal het aantal onregelmatige werkwoorden voor $t = 2000$. Deze uitkomst is 3% van het totaal.

28 De afname is 0,01%, welke groeifactor hoort hierbij?

29 Bereken eerst hoeveel het werkwoord **worden** meer wordt gebruikt dan het werkwoord **komen**.

30 Groeipercentage dus exponentiele groei. Bereken eerst de groeifactor.

31 Wat wordt *B* bij verdubbeling? Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.

32 Exponentiële groei. De halveringstijd is 6 uur. Hoeveel procent is er dan over na 12 uur en na 18 uur etc.

33 Na 7 dagen is er nog 17,3% over. Bepaal de groeifactor per 7 dagen en daarna per uur.

34 Ga na welke vergelijking moet worden opgelost.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 5

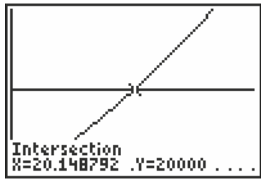
Defensiebegroting

1 *De begroting is gehalveerd als de begroting met 50% is verminderd of anders gezegd als er nog 50% van de oorspronkelijke begroting over is.*
(a)
In geval (a) wordt de begroting elk jaar verminderd met 5% van het oorspronkelijke bedrag. Na twee jaar is de begroting verminderd met $2 \cdot 5\% = 10\%$, na 3 jaar met $3 \cdot 5\% = 15\%$ etc. dus na 10 jaar met $10 \cdot 5\% = 50\%$.
Conclusie: na 10 jaar is de begroting gehalveerd.
(b)
In geval (b) wordt de begroting verminderd met 5% van de begroting van het voorafgaande jaar. Dus elk jaar blijft er 95% over dan de begroting van het voorafgaande jaar. Er is sprake van exponentiële groei en de groeifactor per jaar is hier 0,95.
Na 1 jaar is er nog $0{,}95 \cdot$ de oorspronkelijke begroting,
na 2 jaar nog $0{,}95 \cdot 0{,}95 \cdot$ de oorspronkelijke begroting etc.
Dus na n jaar is er nog $(0{,}95)^n \cdot$ de oorspronkelijke begroting.
$n = 13$ dus $(0{,}95)^n = (0{,}95)^{13} = 0{,}51$
$n = 14$ dus $(0{,}95)^n = (0{,}95)^{14} = 0{,}49$ (49 %)
Na 13 jaar is er nog iets meer dan de helft van de begroting en na 14 jaar is de begroting iets minder dan de helft, er is nog 49% van de oorspronkelijke begroting.
Conclusie: na 14 jaar is de begroting gehalveerd.
Of met de grafische rekenmachine.
Voer de formule $y = (0{,}95)^x$ *in.*
Als de grafiek voor het eerst onder de 0,5 komt dan is de begroting gehalveerd.

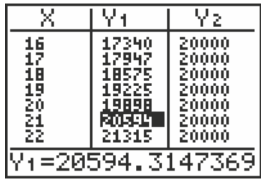
2 *In de tekst staat dat 15 miljard 5% van de defensiebegroting D in 1989 is.*
De defensiebegroting in 1989 was $\frac{15}{0{,}05}$ miljard = 300 miljard dollar.
n is het aantal jaren na 1989. Op $n = 0$ (1989) $D = 300$ miljard.
(a)
In geval (a) wordt de begroting lineair verminderd, elk jaar gaat er 5% van 300 miljard is $0{,}05 \cdot 300 = 15$ miljard af. Dus de grafiek heeft een richtingscoëfficient –15 en gaat door (0, 300), dus de formule voor defensiebegroting is $D = 300 - 15n$ (D in miljarden dollars).
(b)
In geval (b) is er sprake van exponentiele groei. De defensiebegroting wordt elk jaar 5% minder, dus de groeifactor is 0,95. De grafiek gaat door (0, 300).
Formule voor defensiebegroting is $D = 300 \cdot (0{,}95)^n$ (D in miljarden dollars).

Sparen, sparen of sparen

3 *De vergelijking* $10\,000 \cdot 1{,}035^t = 20\,000$ *moet worden opgelost.*
eerste manier, met grafische rekenmachine en intersect:
Voer de functies $y_1 = 10\,000 \cdot 1{,}035^x$ en $y_2 = 20\,000$ in.
Kies een geschikt WINDOW bijvoorbeeld: $[0, 40] \times [0, 40\,000]$
Bepaal met behulp van intersect in het grafiekenscherm het snijpunt $x = 20{,}149$ en $y = 20\,000$



tweede manier, met grafische rekenmachine en tabel:
Voer de functie $y_1 = 10\,000 \cdot 1{,}035^x$ in.
Kijk in de tabel bij welke waarde y_1 voor het eerst boven de 20 000 komt.
Dit is bij $x = 21$
Conclusie: na 21 jaar is het bedrag ruimschoots verdubbeld.

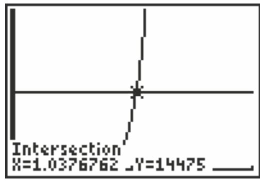


© ThiemeMeulenhoff

4 *Op de depositorekening is de toename lineair. Bereken dus eerst het bedrag van toename per 10 jaar en reken dit om naar het bedrag per jaar.*
Het bedrag volgens de groeirekening na 10 jaar is $10\,000 \cdot 1{,}035^{10} = 14\,105{,}99$.
Dus het totaalbedrag aan rente is in 10 jaar 4105,99.
Op de depositorekening moet het bedrag aan rente per jaar gelijk zijn aan 410,599, oftewel 410,60 euro.
Conclusie: het rentepercentage is $\frac{410{,}60}{10\,000} \cdot 100\% \approx 4{,}1\%$

5 Het 7e jaar wordt er $2615 - 2130 = 485$ euro aan rente bijgeschreven op de betaalrekening *B*, zie tabel 1 bij de opgave.
Conclusie: het rentepercentage is $\frac{485}{10\,000} \cdot 100 \approx 4{,}85\%$

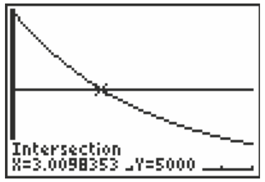
6 *De renteklimrekening geeft in 10 jaar totaal 4475 euro rente.*
De formule voor de groeirekening is $G = 10\,000 \cdot g^t$
Het eindbedrag van de groeirekening moet na 10 jaar gelijk zijn aan
$10\,000 + 4475 = 14\,475$ euro.
$G = 14\,475$ na 10 jaar (*t = 10 invullen in* $G = 10\,000 \cdot g^t$)
Los nu op $14\,475 = 10\,000 \cdot g^{10}$
Oplossen met behulp van de grafische rekenmachine en intersect.
Voer de functies $y_1 = 14\,475$ en $y_2 = 10\,000 \cdot x^{10}$ in.
Kies een geschikt WINDOW bijv.: [0, 2] x [0, 30 000]
Bepaal met behulp van intersect in het grafiekenscherm
het snijpunt $x = 1{,}03768$ (groeifactor g) en $y = 14\,475$
Conclusie: $g = 1{,}0377$ dus het rentepercentage is 3,77%.

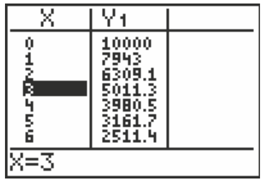


Boekwaarde

7 *Bij methode 1 is de daling lineair, dus elk jaar daalt de waarde evenveel. De daling per jaar moet berekend worden.*
In 10 jaar tijd daalt de boekwaarde van 10 000 euro naar 1000 euro, dus een daling van 9000 euro; per jaar daalt de boekwaarde 900 euro, dus de richtingscoëfficiënt is –900
of
Neem twee punten bijvoorbeeld (0, 10 000) en (10, 1000) en bereken de
richtingscoëfficiënt $= \frac{\text{toename } B}{\text{toename } t} = \frac{1000 - 10000}{10 - 0} = -900$

8 Los op $10\,000 \cdot 0{,}7943^t = 5000$ of $0{,}7943^t = 0{,}5$
Oplossen met behulp van de grafische rekenmachine.
Voer de functie $y_1 = 10\,000 \cdot 0{,}7943^x$ en $y_2 = 5000$ in
Kies een geschikt WINDOW, bijvoorbeeld $[0, 10] \times [0{,}10\,000]$
Intersect geeft $x = 3{,}01$.
of
Kijk in de tabel waar de *y*-waarde ongeveer 5000 is,
dit is bij $x = 3$.
Conclusie: na iets meer dan 3 jaar is de boekwaarde gehalveerd.





 © ThiemeMeulenhoff

Concentratie van vloeistoffen

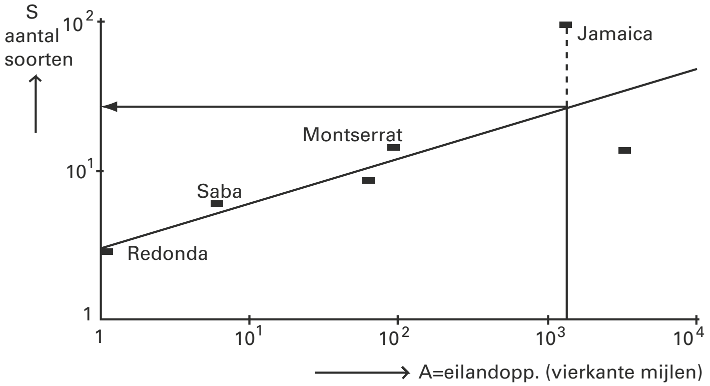
9 Op tijdstip $s = 0$ zit er 0,8 liter vloeistof in het vat met 20 000 mg chemische stof.
Per minuut wordt er 25 liter in het vat bij gepompt.
Op $s = 1$ is er dus $0{,}8 + 25$ liter vloeistof in het vat.
Op $s = 2$ is er $0{,}8 + 25 \cdot 2$ liter vloeistof in het vat.
Dus op een willekeurig tijdstip, tijdens het vollopen van het vat,
is er $0{,}8 + 25s$ liter vloeistof in het vat.
Conclusie: $C = \frac{\text{hoeveelheid chemische stof in mg}}{\text{aantal liter}} = \frac{20\,000}{0{,}8 + 25 \cdot s}$

10 Groeifactor per 4 minuten $= \frac{38{,}94}{50{,}00}$
Groeifactor per minuut $= \left(\frac{38{,}94}{50{,}00}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)} = 0{,}9394$

11 *Er wordt gevraagd naar de totale tijd dat het pompen duurt tot C = 1, dus de tijd van het volpompen + de tijd van het uitstromen.*
tijd van volpompen
Het vat bevat in het begin alleen 10 000 mg droge chemische stof en geen vloeistof.
Per minuut wordt er 25 liter spoelmiddel in het vat gepompt.
Totaal zijn er $\frac{400}{25} = 16$ minuten nodig om het vat van 400 liter vol te pompen.
tijd van het uitstromen tot de concentratie C = 1
Vanaf het moment dat het vat vol is geldt de formule concentratie $C = 25 \cdot 0{,}94^t$
De vergelijking $C = 25 \cdot 0{,}94^t = 1$ moet worden opgelost.
oplossen met behulp van de grafische rekenmachine.
Voer bijvoorbeeld de functies $y_1 = 25 \cdot 0{,}94^x$ en $y_2 = 1$ in.
Bepaal het snijpunt met behulp van intersect.
Het snijpunt ligt bij $x \approx 52$.
Conclusie: in totaal duurt het pompen ongeveer $16 + 52 = 68$ minuten.

Diersoorten

12 *Gebruik de figuur om de grote van het eiland Jamaica af te lezen.*
eerste manier met de grafiek:
Jamaica is ongeveer $10^{3,1}$ vierkante mijlen (lees dit af op de horizontale as, zie figuur).



Lees in de figuur het aantal soorten *S* af (zie de pijl).
Een even groot eiland geeft volgens de grafiek $S = 10^{1,4} = 25{,}1$ oftewel 25 soorten.

© ThiemeMeulenhoff

tweede manier met de formule:
Uit de grafiek: A is ongeveer $10^{3,1} = 1258{,}9$ vierkante mijlen.
Invullen in de formule $S = 3 \cdot A^{0,30}$ geeft $S = 3 \cdot 1258{,}9^{0,30} = 25{,}53$ oftewel 25 of 26 soorten.

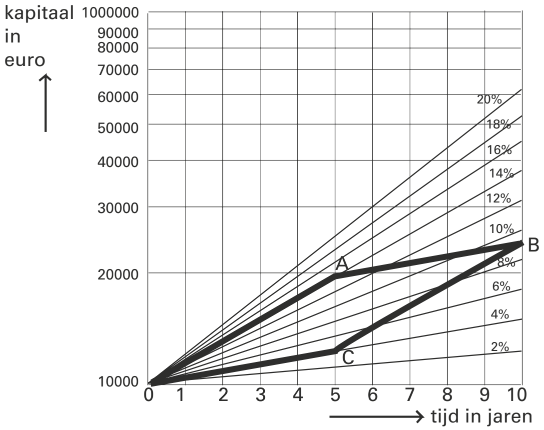
13 *Een 10 keer zo groot eiland dus vergelijk in de formule A en 10A.*
Voor $A = 1$ geldt: $S = 3 \cdot 1^{0,30} = 3$, voor $A = 10$ geldt $S = 3 \cdot 10^{0,30} = 6$.
Voor A = 1 en A = 10 klopt het maar dit is nog geen bewijs dat het altijd klopt.
In dit geval kun je niet met een getallenvoorbeeld volstaan. Je moet dus voor een algemenere aanpak kiezen.
Als we voor A tien keer zoveel invullen ($10A$) krijgen we twee keer zoveel diersoorten:
$S = 3 \cdot (10A)^{0,30} = 3 \cdot 10^{0,30} \cdot A^{0,30} = 3 \cdot 2 \cdot A^{0,30} = 6 \cdot A^{0,30}$.
Conclusie: bij een 10 keer zo'n groot eiland, zijn er twee keer zoveel diersoorten.

14 *Bereken voor beide mogelijkheden het aantal diersoorten.*
mogelijkheid a
1 groot natuurreservaat met $A = 400$ vierkante mijlen geeft $S = 3 \cdot 400^{0,30} = 18{,}1$ oftewel 18 verschillende diersoorten.
mogelijkheid b
1 klein reservaat met $A = 200$ vierkante mijlen geeft $S = 3 \cdot 200^{0,30} = 14{,}7$ oftewel 15 verschillende diersoorten.
2 kleine reservaten hebben 8 diersoorten gemeenschappelijk.
Totaal zijn er in de 2 kleine reservaten 15 + 15 – 8 = 22 diersoorten.
Conclusie: men kiest voor mogelijkheid b, 2 kleine reservaten.

Beleggen

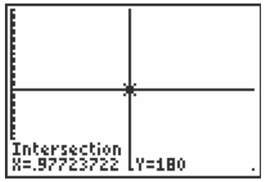
15 Het startkapitaal is 10 000. Kijk in de figuur waar de lijn met 8% de lijn kapitaal is 20 000 snijdt. Er is verdubbeling van het kapitaal bij $t = 9$.

16 De grafiek van de groei van het kapitaal loopt de eerste vijf jaar gelijk met de lijn waar 14% boven staat. Na vijf jaar is het kapitaal volgens de grafiek iets meer dan 19 000 euro (zie grafiek punt A). Vanaf dit punt is het rentepercentage 4% en verloopt de groei evenwijdig aan de lijn waar 4% boven staat. De grafiek komt na 10 jaar uit in punt B.



Het HABOG

17 *De warmteafgifte neemt exponentieel af. Bepaal eerst de groeifactor en dan het percentage.*
In 100 jaar vermindert de warmteafgifte van 1800 Watt tot 180 Watt.
eerste manier met de grafische rekenmachine:
$W = 1800 \cdot g^t$ is de formule voor exponentiële groei met groeifactor g per jaar en warmteafgifte $W = 1800$ Watt op $t = 0$.
$W = 180$ als $t = 100$ dus de vergelijking $180 = 1800 \cdot g^{100}$ moet worden opgelost.
voer in $y_1 = 180$ en $y_2 = 1800 \cdot x^{100}$
kies een geschikt WINDOW bijv. [0, 2] x [0, 300]
intersect geeft $g = 0{,}9772$
Conclusie: afname is $(1 - 0{,}9772) \cdot 100\% = 2{,}28\%$ per jaar.



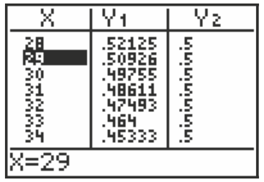
tweede manier berekenen:

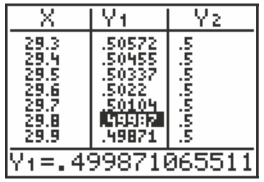
$$g_{\text{per 100 jaar}} = \frac{1800}{180} = 0{,}1 \text{ dus } g_{\text{per jaar}} = (0{,}1)^{\left(\frac{1}{100}\right)} = (0{,}1)^{0,01} \approx 0{,}9772.$$

Conclusie: de afname is $(1 - 0{,}9772) \cdot 100\% = 2{,}28\%$ per jaar.

18 *De warmteafgifte neemt exponentieel af met 2,3% per jaar.*
$g_{\text{per jaar}} = 0{,}977$ dus $g_{\text{per 10 jaar}} = 0{,}977^{10} = 0{,}7924$
Conclusie: afname is $(1 - 0{,}7924) \cdot 100\% = 20{,}76\% \approx 20{,}8\%$ per 10 jaar.

19 *De vergelijking $0{,}977^t = 0{,}5$ moet worden opgelost.*
eerste manier met grafische rekenmachine en intersect:
Voer in $y_1 = 0{,}977^x$ en $y_2 = 0{,}5$ en kies geschikt WINDOW bijv. [0, 40] x [0, 1]
intersect geeft $t = 29{,}8$.
Dus na 29,8 jaar is de warmteafgifte gehalveerd.
tweede manier met grafische rekenmachine en tabel:
Met stapgrootte 1 is te zien dat g ligt tussen 29 en 30.
Neem stapgrootte 0,1.





Voor $t = 29{,}8$ geldt voor het eerst $y_1 < 0{,}5$
Dus na 29,8 jaar is de warmteafgifte gehalveerd.

20 *Er is een vast rentepercentage dus ook een vaste groeifactor gedurende de gehele looptijd. Bepaal met behulp van twee nauwkeurig afgelezen punten eerst de groeifactor en dan het percentage.*
In 2032 is er 100 miljoen euro en na 76 jaar in 2108 is er 1 miljard euro.

$$g_{\text{per 76 jaar}} = \frac{1\,000\,000\,000}{100\,000\,000} = 10 \text{ dus } g_{\text{per jaar}} = (10)^{\left(\frac{1}{76}\right)} \approx 1{,}03$$

Conclusie: het rentepercentage per jaar is ongeveer 3%.

CBS-cijfers

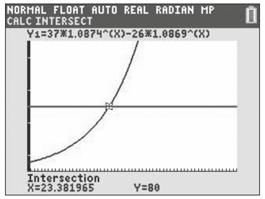
21 *Het gaat over de stijging in 2009 ten opzichte van twee jaar ervoor, dus in 2007.*
In 2009 is het aandeel duurzame energie 4% en in 2007 was dit 2,8%.
Dit is een groei van $\frac{4-2,8}{2,8} \cdot 100\% = 42,8\%$ oftewel afgerond 43%.
Conclusie: de genoemde 40% van Samsom is minder dan 43%.

22 *Mevrouw van Tongeren gaat uit van een lineaire groei van het aandeel van duurzame energie. De formule heeft de vorm $y = ax + b$.*
In 2007 was het aandeel 2,8%, in 2008 was dit 3,4% en in 2009 4%.
Elk jaar stijgt het percentage met 0,6%, dus de richtingscoëfficiënt = 0,6.
Neem P = percentage duurzame energie, t is tijd in jaren met $t = 0$ is 2007.
De grafiek gaat door (0; 2,8) en de richtingscoëfficiënt = 0,6, dus $P = 0,6 \cdot t + 2,8$
Het aandeel duurzame energie in 2020 (dus $t = 13$) is $P = 0,6 \cdot 13 + 2,8 = 10,6\%$.

23 *Meneer Samson gaat uit van een exponentiele groei van het aandeel van duurzame energie. De formule heeft de vorm $y = b \cdot g^t$.*
Per twee jaar groeit het percentage met 40%, dus de groeifactor per twee jaar = 1,40.
De groeifactor $g_{\text{per jaar}} = 1,4^{0,5} = 1,1832$.
Neem P = percentage duurzame energie, t is tijd in jaren met $t = 0$ is 2007.
De grafiek gaat door (0; 2,8) en de groeifactor = 1,1832, dus $P = 2,8 \cdot 1,1832^t$
Het aandeel duurzame energie in 2020 (dus $t = 13$) is $P = 2,8 \cdot 1,1832^{13} = 24,9\%$.

China's defensie-uitgaven

24 *Maak gebruik van exponentiële modellen, dus een formule van de vorm $y = b \cdot g^t$*
Lees uit de figuur van hoge en lage schatting de groeifactor en de beginwaarde af.
Neem $t = 0$ (is 1994) met t in jaren en B het bedrag in miljarden dollars.
lage schatting
In 1994 is de uitgave 26 miljard dollar en in 2005 is dit 65 miljard dollar.



Per 11 jaar is de groeifactor $\frac{65}{26} = 2,5$ dus per jaar is dit $(2,5)^{\left(\frac{1}{11}\right)} \approx 1,0869$.
Formule wordt $B_{\text{laag}} = 26 \cdot 1,0869^t$
hoge schatting
in 1994 is de uitgave 37 miljard dollar en in 2005 is dit 93 miljard dollar.
Per 9 jaar is de groeifactor $\frac{93}{37} \approx 2,5135$ dus per jaar is dit $(2,5135)^{\left(\frac{1}{11}\right)} \approx 1,0874$.
Formule wordt $B_{\text{hoog}} = 37 \cdot 1,0874^t$
hoge schatting – lage schatting = 80 miljoen
Het verschil is 80 miljoen euro als $B_{\text{hoog}} - B_{\text{laag}} = 37 \cdot 1,0874^t - 26 \cdot 1,0869^t = 80$
Voer in $y_1 = 37 \cdot 1,0874^x - 26 \cdot 1,0869^x$ en $y_2 = 80$
Kies een geschikt WINDOW bijv. [0, 60] × [0,160]
Intersect: x is ongeveer 23,38 jaar na 1994.
Conclusie: 24 jaar na 1994, dus in 2018 is het verschil meer dan 80 miljoen.

© ThiemeMeulenhoff

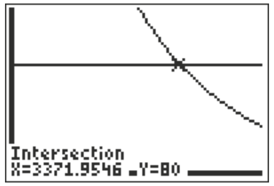
Woei wordt waaide

25 *Daling gaat volgens een exponentieel verband.*

jaar	Aantal onregelmatige werkwoorden
800 na Christus	177
1200 na Christus	145
2000 na Christus	98

Van 800 tot 2000 na Christus daalt het aantal van 177 naar 98.
De groeifactor per 1200 jaar is $\frac{98}{177} \approx 0,5537$
De groeifactor per 100 jaar is $\left(\frac{98}{177}\right)^{\left(\frac{1}{12}\right)} \approx 0,9519$ oftewel ongeveer 0,95
Conclusie: er is sprake van een afname van ongeveer 5% per 100 jaar.

26 De vergelijking $W = 432 \cdot 0,9995^t = 80$ oplossen.
eerste manier met de grafische rekenmachine en een grafiek:
Voer in $y_1 = 432 \cdot 0,9995^x$ en $y_2 = 80$
Kies een geschikt WINDOW (bijv. [0, 5000] x [0, 120]
Intersect geeft 3371,95.
Conclusie: in het jaar 3372 is het aantal nog maar 80.



tweede manier, met de grafische rekenmachine en een tabel:
Voer in $y_1 = 432 \cdot 0,9995^x$ en $y_2 = 80$
Maak een tabel met bijv. stapgrootte 100, daarna een tabel met stapgrootte 10 en vervolgens met stapgrootte 1.

X	Y1	Y2
3000	96.356	80
3100	91.656	80
3200	87.184	80
3300	82.931	80
3400	78.886	80
3500	75.037	80
3600	71.377	80

X=3000

X	Y1	Y2
3340	81.289	80
3350	80.883	80
3360	80.48	80
3370	80.078	80
3380	79.679	80
3390	79.281	80
3400	78.886	80

X=3400

X	Y1	Y2
3370	80.078	80
3371	80.038	80
3372	79.998	80
3373	79.958	80
3374	79.918	80
3375	79.878	80
3376	79.838	80

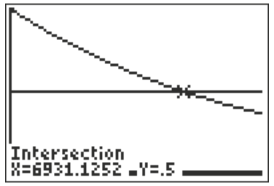
X=3370

Conclusie: in het jaar 3372 is het aantal nog maar 80.

27 In de vergelijking $W = 432 \cdot 0,9995^t$ $t = 2000$ invullen geeft $W = 432 \cdot 0,9995^{2000} = 158,8$.
Dus in het jaar 2000 zijn er 159 onregelmatige werkwoorden. Dit is 3% van het totaal.
Terug rekenen naar 100% geeft het totaal aantal werkwoorden.
3% is 159, dus 100% is $\frac{159}{3} \cdot 100 = 5300$
Conclusie: in het jaar 2000 zijn er 5300 werkwoorden.

28 *Er is sprake van exponentiële afname met 0,01% per jaar.*
De groeifactor is $\frac{100-0,01}{100} = = 0,9999$
Voor halvering moet de vergelijking $0,9999^t = 0,5$ worden opgelost.

eerste manier met de grafische rekenmachine en een grafiek:
Voer in $y_1 = 0,9999^x$ en $y_2 = 0,5$
Kies een geschikt WINDOW (bijv. [0, 10 000] x [0, 1]
Intersect geeft 6931,13
Conclusie: na 6932 jaar is het aantal woorden gehalveerd.



© ThiemeMeulenhoff

tweede manier, met de grafische rekenmachine en een tabel:
Voer in $y_1 = 0{,}9999^x$ en $y_2 = 0{,}5$
Maak een tabel met bijv. stapgrootte 100, daarna een tabel met stapgrootte 10 en vervolgens met stapgrootte 1.

X	Y1	Y2
6500	.52203	.5
6600	.51683	.5
6700	.51169	.5
6800	.5066	.5
6900	.50156	.5
7000	.49657	.5
7100	.49163	.5

X=6900

X	Y1	Y2
6900	.50156	.5
6910	.50106	.5
6920	.50056	.5
6930	.50006	.5
6940	.49956	.5
6950	.49906	.5
6960	.49856	.5

X=6930

X	Y1	Y2
6930	.50006	.5
6931	.50001	.5
6932	.49996	.5
6933	.49991	.5
6934	.49986	.5
6935	.49981	.5
6936	.49976	.5

X=6930

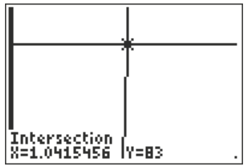
Conclusie: na 6932 jaar is het aantal woorden gehalveerd.

29 Het werkwoord "komen" wordt na 13 000 jaar regelmatig.
Het werkwoord "komen" komt 267 532 keer voor en het werkwoord "worden" komt 946 623 keer voor.
Het werkwoord worden, wordt $\frac{946\,623}{267\,532} \approx 3{,}53835$ keer zo veel gebruikt en het duurt volgens de regel $\sqrt{3{,}53835} \approx 1{,}88$ keer zo lang tot het regelmatig wordt.
$13\,000 \cdot 1{,}88 = 24\,440$
Conclusie: na ongeveer 24 000 jaar wordt het werkwoord worden regelmatig.

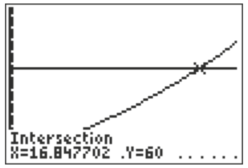
Bloeiperiode

30 *Groeipercentage dus exponentiële groei.*
eerste manier, bereken eerst de groeifactor:
Bloeiperiode neemt toe van 30 naar 83 dagen dus vermenigvuldigingsfactor is
$\frac{83}{30} = 2{,}766...$ in 25 jaar.
Bloeiperiode neemt toe met vermenigvuldigingsfactor $2{,}77^{\left(\frac{1}{25}\right)} \approx 1{,}0415$ per jaar.
Conclusie: bloeiperiode neemt toe met 4,15% per jaar.

tweede manier grafische rekenmachine:
Ga na welke vergelijking opgelost moet worden. Bereken betekent dat je de grafische rekenmachine mag gebruiken.
Er moet gelden $30 \cdot g^{25} = 83$
Voer in $y_1 = 30 \cdot x^{25}$ en $y_2 = 83$
Kies een geschikt WINDOW bijv: [0, 2] x [30, 100]
intersect geeft $x = 1{,}0415...$ dus $g = 1{,}0415$ per jaar.
Conclusie: bloeiperiode neemt toe met 4,15% per jaar.



31 *Ga na welke vergelijking opgelost moet worden. Berekenen betekent dat je de grafische rekenmachine mag gebruiken.*
Voor verdubbeling moet de vergelijking $30 \cdot 1{,}042^t = 60$ (of $1{,}042^t = 2$) opgelost worden.
Voer in $y_1 = 30 \cdot 1{,}042^x$ en $y_2 = 60$
Kies een geschikt WINDOW bijv: [0, 20] x [30, 80]
intersect geeft $x = 16{,}8...$ dus $t = 16{,}8$ jaar (zie schermafbeelding).
Conclusie: na (bijna) 17 jaar is de bloeiperiode twee keer zo lang.

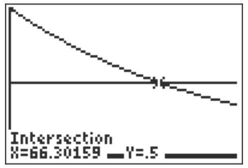


Radioactieve stoffen

32 *De halveringstijd is 6 uur dus er is sprake van exponentiële groei en elke 6 uur halveert de hoeveelheid.*
eerste manier halveringen berekenen:
Na 6 uur is 50% over.
Na 12 uur is 25% 0ver.
Na 18 uur is 12,5% over
Na 24 uur is 6,25% over.
Conclusie: er is nog 6,25% over.
tweede manier vermenigvuldigingsfactor berekenen:
Vermenigvuldigingsfactor per 6 uur is 0,5.
Vermenigvuldigingsfactor per 24 uur is $0{,}5^4 = 0{,}0625$
Conclusie: er is nog 6,25% over.

33 *Er is sprake van exponentiële groei en na precies 7 dagen is nog 17,3% van de stof over.*
De groeifactor per 7 dagen is 0,173
7 dagen = 7 × 24 uur = 168 uren dus de groeifactor per uur is $0{,}173^{\left(\frac{1}{168}\right)} \approx 0{,}9896$
De afname is dan $1 - 0{,}9896 = 0{,}0104$
Conclusie: afname is 1,04% per uur.
Let op het gebruik van haakjes in $0{,}173^{\left(\frac{1}{168}\right)}$

34 *Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.*
Er is een afname van 1,04% dus de vermenigvuldigingsfactor is $1 - 0{,}0104 = 0{,}9896$.
Voor de halveringstijd t geldt $0{,}9896^t = 0{,}5$
Berekenen met de grafische rekenmachine.
Voer in $y_1 = 0{,}9896^x$ en $y_2 = 0{,}5$
Kies een geschikt WINDOW bijv: [0, 100] x [0, 1]
intersect geeft $x = 66{,}3$ … dus $t = 66{,}3$ uur (zie schermafbeelding).
Conclusie: na 66 of 67 uur is de hoeveelheid Mo-99 gehalveerd.



6 Formules met één of meer variabelen

Isoleren

Tijdens het stookseizoen verliest een huis warmte aan de omgeving.
We letten eerst op het warmteverlies via het dak van het huis.
Het ene dak isoleert beter dan het andere. Een maat voor dit isolatievermogen is de *warmteweerstand R*. Hoe groter de warmteweerstand *R*, des te kleiner is het warmteverlies. Voor het warmteverlies *V*, uitgerukt in kcal, via een dak geldt:

$$V = \frac{opp \cdot tijd \cdot \Delta Temp}{R}$$

waarbij: *opp* = oppervlakte dak in m^2
tijd = tijd in uren;
Δ*Temp* = temperatuurverschil in °C tussen 18 °C (stookgrens) en gemiddelde buitentemperatuur.

Een dak heeft een oppervlakte van 30 m^2.
De warmteweerstand *R* van dit dak is 0,5.
Het stookseizoen duurt 6000 uren.
Voor het gehele stookseizoen geldt dat de gemiddelde buitentemperatuur 12 ºC is.
Verder is bekend dat 1 m^3 aardgas 6050 kcal levert.

1 Laat zien dat er door het warmteverlies via dit dak ongeveer 357 m^3 aardgas extra per stookseizoen verstookt moet worden.

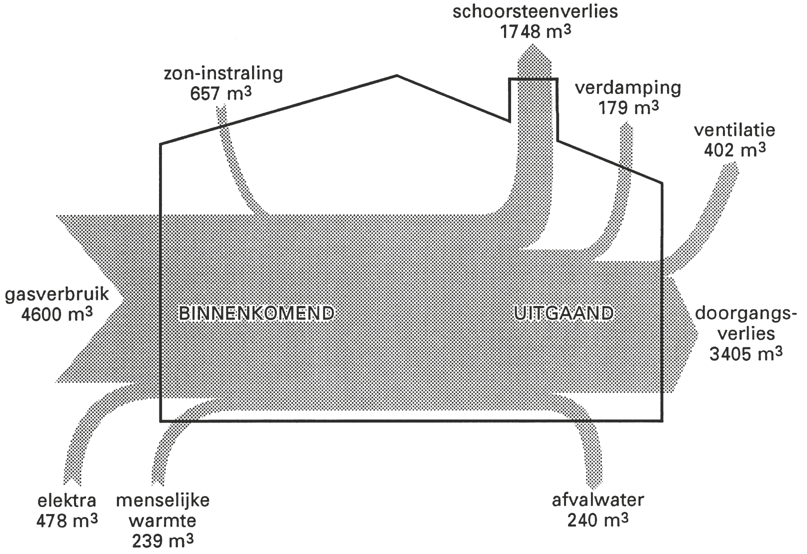
Bij dit dak was *R* = 0,5. Om deze warmteweerstand *R* groter (dus het warmteverlies *V* kleiner) te maken, wordt dit dak met steenwoldekens geïsoleerd. De dikte van de steenwoldekens is bepalend voor de isolatie: iedere toegevoegde cm steenwoldekens zorgt er voor dat *R* met 0,25 toeneemt. Dankzij de steenwoldekens moet voor het warmteverlies *V* via het dak per stookseizoen nog maar 119 m^3 aardgas worden verstookt, dus slechts $\frac{1}{3}$ van de vroegere waarde.

2 Bereken de dikte van de steenwoldekens.

In figuur 1 zie je de warmtebalans van een gemiddeld niet-geïsoleerd huis. Alle vormen van energie in deze warmtebalans zijn uitgedrukt in m^3 gas. In een warmtebalans is de hoeveelheid binnenkomende energie gelijk aan de hoeveelheid uitgaande energie. Alle getallen in figuur 1 zijn per jaar.

© ThiemeMeulenhoff

figuur 1



Het *doorgangsverlies* (zie figuur 1) is het verlies van warmte door muren, ramen, daken, vloeren, enzovoort.
Door betere isolatie kan dit doorgangsverlies met 55% verminderd worden. Daar staat tegenover dat de zon-instraling dan zal afnemen van 657 m^3 tot 600 m^3. Er ontstaat een nieuwe warmtebalans. Neem aan dat alle andere grootheden in figuur 1, op gasverbruik na, gelijk blijven.

3 Met hoeveel m^3 zal het jaarlijks gasverbruik afnemen? Licht je antwoord toe.

McDonald's

In 2000 had de fastfoodketen McDonald's in verschillende landen heel wat vestigingen. Alleen al in de Verenigde Staten (VS), waar er in het jaar 2000 250 miljoen mensen woonden, waren er toen 9500 vestigingen. Nederland had toen ongeveer 15 miljoen inwoners.

Neem eerst aan dat de verhouding van het aantal vestigingen en het aantal inwoners in Nederland even groot is als in de VS.

4 Hoeveel vestigingen zouden er dan in Nederland zijn in het jaar 2000? Licht je antwoord toe.

J. Cantapulo heeft de leiding over de internationale afdeling van McDonald's. Voor het bepalen van het gewenste aantal vestigingen M_X in een bepaald land *X* gaat hij uit van de volgende formule:

$$M_X = \frac{\text{aantal inwoners van land } X}{\text{gemiddeld aantal inwoners per vestiging in VS}} \cdot \frac{\text{gemiddeld inkomen in land } X}{\text{gemiddeld inkomen in VS}}$$

Het gemiddeld inkomen in een land vindt men door het totale inkomen, omgerekend in dollars, te delen door het aantal inwoners van dat land.

© ThiemeMeulenhoff

Het totale inkomen in Nederland was 253 miljard dollar. We schrijven dit als TI_{NED} = 253 miljard. Voor de VS geldt: TI_{VS} = 4950 miljard.

5 Bereken hoe groot het gewenste aantal vestigingen in 2000 in Nederland is volgens de formule van Cantapulo.

We gaan uit van de gegevens over de VS, te weten 9500 McDonald's vestigingen, TI_{VS} = 4950 miljard en een bevolking van 250 miljoen mensen. De formule van Cantapulo kan vereenvoudigd worden, zodat M_X wordt uitgedrukt in TI_X.

6 Stel deze formule op.

Veevoeder

figuur 2

Melkvee dat op stal staat, moet goed gevoederd worden. Koeien moeten voldoende voeding krijgen en dit voer moet van goede samenstelling en kwaliteit zijn.
In de hoge eisen die aan het voer gesteld worden, gebruikt men het begrip VEM-behoefte (VEM = Voeder Eenheid Melkvee). Met de VEM-behoefte wordt aangegeven wat een koe per dag aan voer nodig heeft. Om gezond te blijven heeft een koe met een lichaamsgewicht van 600 kg een VEM-behoefte van 5000.
Koeien, die melk geven, hebben extra voedingsstoffen, dus ook extra eenheden VEM nodig. Het aantal kilo's melk dat een koe per dag produceert, noemen we de melkgift. Er bestaan tabellen waarin, bij de melkgift en het vetpercentage van die melk, de bijbehorende VEM-behoefte af te lezen is. Tabel 1 geldt voor koeien met een lichaamsgewicht van 600 kg.

tabel 1

werkelijke melkgifte (*m*) in kg	3,5% vet VEM-beh.	3,75% vet VEM-beh.	**4% vet VEM-beh.**	4,25% vet VEM-beh.
10	9150	9300	**9500**	9650
15	11250	11500	**11800**	12050
20	13400	13750	**14100**	14450
25	15600	16000	**16450**	16900
30	17800	18350	**18850**	19400
35	20000	20650	**21300**	21950

Melk met 4% vet heet meetmelk.

© ThiemeMeulenhoff

Bij meetmelk kan als benadering voor de VEM-behoefte van een koe van 600 kg de formule:

VEM-behoefte = 5000 + 460 M

gebruikt worden (M = melkgift in kg meetmelk).

Als je de uitkomsten van deze formule vergelijkt met de bijbehorende getallen in de 4% vetkolom van de tabel, ontdek je dat de formule uitkomsten levert die wat afwijken van de bijbehorende tabelwaarden.

7 Wat is de grootste procentuele afwijking die je tegenkomt?
Licht je antwoord toe.

Tabel 1 geeft niet voor alle vetpercentages de VEM-behoefte. Om die ook voor andere percentages te kunnen bepalen, rekent men de werkelijke melkgift m eerst om naar de melkgift M van meetmelk. Voor het omrekenen van m naar M gebruikt men de formule:

$M = (0{,}4 + 0{,}15\,v) \cdot m$

M = melkgift in kg meetmelk; v = vetpercentage; m = werkelijke melkgift in kg.

8 Laat met behulp van de formule zien dat bij een vetpercentage van 4 de werkelijke melkgift gelijk is aan de melkgift in meetmelk.

Met behulp van de twee formules kunnen we nu de VEM-behoefte berekenen van een koe van 600 kg, die dagelijks 25 kg melk geeft met 5% vet.

9 Bereken die VEM-behoefte.

Een koe van 600 kg die nog geen melk geeft, heeft een VEM-behoefte van 5000.
Voor iedere 50 kg lichaamsgewicht boven of beneden 600 kg moet de VEM-behoefte verhoogd, respectievelijk verlaagd worden met 300 VEM.
De formule voor een koe die nog geen melk geeft wordt VEM-behoefte = 6G + 1400 (G = gewicht in kg).

10 Laat zien dat deze formule klopt voor een koe met het lichaamsgewicht van 525 kg.

De VEM-behoefte van een koe is afhankelijk van het gewicht G van de koe, haar werkelijke melkgift m en het vetpercentage v van die melk.

11 Maak een formule die de VEM-behoefte uitdrukt in G, m en v.

© ThiemeMeulenhoff

Brandstofverbruik

Hoeveel brandstof een personenauto verbruikt, hangt onder andere af van de af te leggen afstand, de rijstijl en het wachten voor verkeerslichten. We gaan dit met behulp van een wiskundig model nader onderzoeken.
In dit model wordt het brandstofverbruik B (in ml) van een auto berekend met de volgende formule:

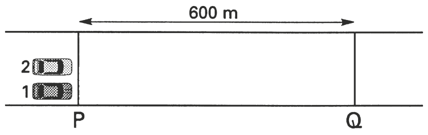
$$B = a \cdot L + b \cdot S + c \cdot D$$

met
L = ritlengte in km
S = aantal stops onderweg
D = totale wachttijd voor verkeerslichten in sec.
a en b zijn getallen die van de rijsnelheid V (in km/u) afhangen en c is een constante.
Voor a, b en c geldt:
$a = 170 - 4{,}55\,V + 0{,}049\,V^2$
$b = 0{,}0077\,V^2$
$c = 0{,}39$
We laten in dit model optrekken en afremmen buiten beschouwing, zodat we in de uitdrukkingen voor a en b steeds een constante waarde voor V kunnen invullen.

Neem een rit over 1 km met een snelheid van 50 km/u, 2 stops onderweg en een totale wachttijd van 40 seconden.

12 Bereken hoeveel procent van het totale brandstofverbruik gebruikt wordt voor de stops en het wachten.

figuur 3



Twee auto's staan voor verkeerslicht P. 600 m verderop staat een verkeerslicht Q (zie figuur 3). Als de auto's tussen P en Q met een snelheid van 50 km/u rijden, springt het verkeerslicht Q precies op tijd op groen en kunnen ze doorrijden.
Houd geen rekening met afremmen en versnellen. Auto 1 rijdt tussen P en Q steeds met een snelheid van 50 km/u en kan dus doorrijden bij Q. Auto 2 rijdt met een snelheid van 70 km/u, zodat deze zal moeten stoppen en wachten bij Q.

13 Laat met een berekening zien dat auto 2 ruim 12 seconden voor verkeerslicht Q moet wachten.

Bekijk de eerste 900 m na verkeerslicht P. Na Q komt er geen verkeerslicht meer en auto 1 rijdt ook daar 50 km/u en auto 2 rijdt daar weer 70 km/u.

14 Onderzoek of auto 2 meer dan twee keer zo veel brandstof nodig heeft als auto 1.

© ThiemeMeulenhoff

Kermis

In de tijd rond koningsdag worden er in veel gemeenten in Nederland kermissen georganiseerd. Een kermisexploitant die een plaats wil hebben op de kermis moet staangeld aan de gemeente betalen. Dat staangeld wordt berekend naar het elektriciteitsverbruik en de oppervlakte van die plaats.

In tabel 2 staan van 6 kermisattracties de oppervlakte en het elektriciteitsverbruik vermeld.

tabel 2

	attractie	oppervlakte	elektriciteitsverbruik per dag
1	reuzenrad	320 m^2	400 kWh
2	surfer	300 m^2	350 kWh
3	spookhuis	350 m^2	300 kWh
4	draaimolen	230 m^2	300 kWh
5	breakdance	450 m^2	500 kWh
6	vliegend Tapijt	300 m^2	450 kWh

Een gemeente rekent € 5,00 huur per m^2 grond per dag en € 0,25 per kilowattuur (kWh).

15 Maak een tabel waarin voor elk van de 6 kermisattracties het staangeld (in euro's) per dag is vermeld.

Stel O = de oppervlakte die een attractie in beslag neemt (in m^2)
E = het elektriciteitsverbruik van een attractie per dag (in kWh)
S = het staangeld voor een attractie per dag (in euro's)

16 Geef een formule voor S uitgedrukt in O en E.

Bij de vaststelling van het staangeld worden door de gemeente ook nog kosten voor reinigingswerkzaamheden in rekening gebracht. Die kosten bedragen € 50,00 per attractie per dag.

17 Geef een nieuwe formule die S uitdrukt in O en E.

Gemiddeld duurt een ritje in de breakdance 5 minuten (inclusief de tijd die nodig is voor het in- en uitstappen). Een kaartje voor één rit kost € 4,00 per persoon.
De kermis is 10 uur per dag open.

18 Hoeveel mensen moeten gemiddeld per rit mee om de kosten van de staanplaats (inclusief reinigingskosten) er uit te halen?

© ThiemeMeulenhoff

Gewicht

Wat voor iemand een gezond gewicht is, hangt (onder andere) af van de lichaamslengte. In de literatuur vind je verschillende methoden om het gewicht te bepalen aan de hand van de lichaamslengte.
Een van die methoden levert als ideaal gewicht voor vrouwen:
$G = 100 \cdot \ L - 110$
We noemen dit even formule (1).
In deze formule is het gewicht G in kilogrammen en de lengte L in meters.

Naast verschillende formules die een verband aangeven tussen het (ideale) gewicht en de lengte, maakt men ook vaak gebruik van de Body Mass Index, de *BMI*.

De formule voor de *BMI* ziet er als volgt uit: $BMI = \frac{1}{L^2} \cdot G$

Ook in deze formule is G in kg en L in m.

19 Bereken de *BMI* van een vrouw die 176 cm lang is en het ideale gewicht heeft volgens formule (1).

Paslengte

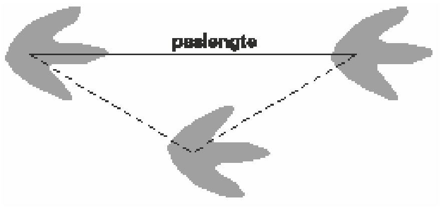
De biomechanicus R.McNeill Alexander heeft van een groot aantal dierensoorten de relatie tussen paslengte, snelheid en grootte bepaald. Uit zijn onderzoek is een formule afgeleid die een goede schatting geeft voor de snelheid van dieren

$v = 2{,}81 \cdot s^{1{,}67} \cdot h^{-1{,}17}$

Hierin is:
- v de snelheid in kilometer per uur;
- s de paslengte in meter tussen twee opeenvolgende voetafdrukken van dezelfde voet (zie figuur 4);
- h de hoogte in meter van de heup.

De formule geldt voor zowel twee- als viervoeters, zowel groot als klein, dus ook voor katten en honden.

figuur 4



Op een besneeuwd terras staan voetsporen van een kat. De heuphoogte van de kat is 21 cm en uit de voetsporen blijkt een paslengte van 35 cm.
20 Bereken de snelheid van de kat toen die haar voetsporen achterliet.

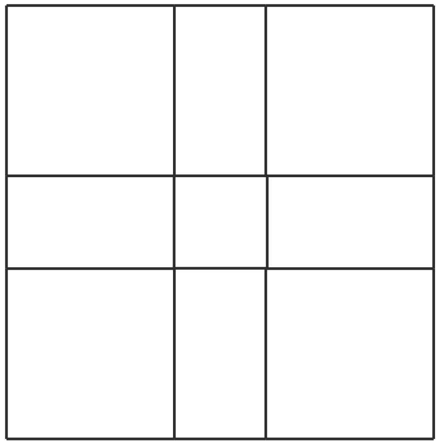
Een hondenliefhebber fietst regelmatig met zijn hond. Het dier blijft dan keurig naast hem lopen, bij elke snelheid. De heuphoogte van de hond is 40 cm.
Als de snelheidsmeter van de fiets 15 km/u aangeeft, ligt de paslengte rond de anderhalve meter.
21 Bereken de paslengte van deze hond in cm nauwkeurig in deze situatie.

Voor een vaste heuphoogte is de formule te herleiden tot $v = c \cdot s^{1{,}67}$.
De waarde van c hangt dan af van de grootte van het dier.
22 Toon aan dat voor de hond de waarde van $c = 8{,}21$ geldt.

Bestrating

Bij het bestraten van een groot terras waarvan de oppervlakte nog niet vaststaat, kiest de tuinarchitect voor een basismotief met vier even grote vierkanten die samen met een kleiner vierkant en vier rechthoeken een groot vierkant vormen. Zie ook figuur 5.

figuur 5

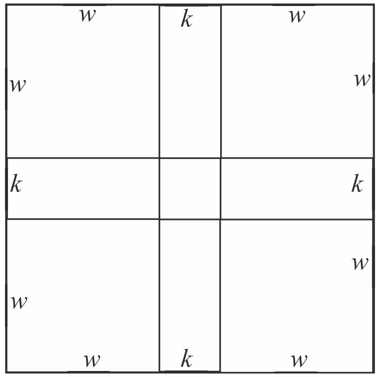


Voor de vier even grote vierkanten en het kleine vierkant in het midden wordt gebruikt gemaakt van gebakken klinkers van het zogenoemde Waalformaat.
Voor de rechthoeken kiest de architect voor betonklinkers, het zogeheten Keiformaat.

Omdat hij nog niet weet hoe lang de zijden van de vierkanten en de rechthoeken worden, maakt hij een volgende schets. Zie figuur 6.

De lengte van de zijden van de grote vierkanten geeft hij aan met de letter w en de breedte van de rechthoeken wordt aangegeven met de letter k.
Zowel w als k zijn gegeven in meters.
De oppervlakte bestraat met Waalformaat geven we aan met O_W.
De oppervlakte bestraat met Keiformaat geven we aan met O_K.

figuur 6



De totale oppervlakte van het terras geven we aan met *O*.
Alle drie oppervlaktes worden bepaald in m^2.

23 Leg uit dat de oppervlakte van het hele terras wordt gegeven door de formule $O = (2w + k)^2$.

24 Bepaal soortgelijke formules voor O_W en O_K en laat met deze formules en de formule van *O* zien dat $O = O_W + O_K$.

De architect heeft de volgende formule opgesteld waarmee de totale kosten *K* (in euro) van het terras bepaald kunnen worden:

$K = 300w^2 + 175wk + 75k^2$

Met deze formule is uit te rekenen hoeveel 1 m^2 Waalklinkers van dit terras kost.

25 Bereken hoeveel 1 m^2 Waalklinkers van dit terras kost.

De opdrachtgever besluit na overleg met de architect om de lengte van de smalle kant van de rechthoeken precies gelijk aan de helft van de lengte van de zijden van de grote vierkanten te nemen.

26 Laat zien dat de formule voor *K* nu geschreven kan worden als $K = 406{,}25 \cdot w^2$.

Het te besteden bedrag blijkt €10 500,- te zijn en de opdrachtgever blijkt een zo groot mogelijk terras voor dat geld te willen.

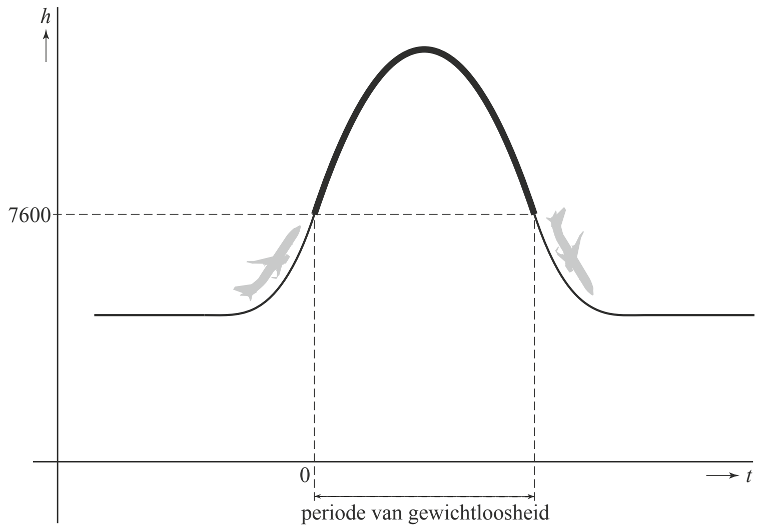
27 Bereken de oppervlakte van het terras.

© ThiemeMeulenhoff

Gewichtloosheid ervaren

Op aarde kun je gewichtloosheid ervaren tijdens zogenaamde paraboolvluchten met een vliegtuig. Deze vluchten worden onder andere gebruikt om astronauten te trainen. Een dergelijke paraboolvlucht verloopt als volgt. Eerst versnelt de piloot het vliegtuig, waarna hij het steil omhoog stuurt. Op een hoogte van 7600 meter schakelt hij de motoren zo ver terug dat alleen nog maar de luchtweerstand wordt overwonnen.
Op dat moment begint de werkelijke paraboolvlucht en de toestand van gewichtloosheid. Zie figuur 7.

figuur 7



Het vliegtuig gaat, vanwege de hoge snelheid, eerst nog omhoog. Als de top van de paraboolbaan is bereikt, duikt het vliegtuig omlaag totdat het weer op dezelfde hoogte is als aan het begin van de paraboolvlucht. Op dat moment schakelt de piloot de motoren weer op vol vermogen en is de toestand van gewichtloosheid voorbij.

De hoogte van het vliegtuig tijdens de paraboolvlucht wordt gegeven door de formule:

$h = -9{,}81 \cdot t^2 + 0{,}38 \cdot v \cdot t + 7600$

Hierin is *h* de hoogte in meter, *t* de tijd in seconden en *v* de snelheid van het vliegtuig in km/uur bij de start van de paraboolvlucht, dat is bij $t = 0$.

Om zinvol te kunnen trainen is het belangrijk dat de toestand van gewichtloosheid minimaal 20 seconden achtereen duurt.

28 Onderzoek bij welke snelheden *v* van het vliegtuig de toestand van gewichtloosheid minimaal 20 seconden duurt.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 6

1 Bepaal alle gegevens die voor de formule van *V* nodig zijn. *V* is in kcal en 1 m^3 gas levert … kcal.

2 Hoeveel kcal wordt geleverd door 119 m^3 gas? Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

3 Bedenk dat het doorgangsverlies met 55% wordt verminderd en dat de zon-instraling afneemt van 657 tot 600 m^3. Vergelijk de situatie nu en de situatie na isolatie.

4 De verhouding blijft gelijk, bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.

5 Bereken eerst het gemiddelde inkomen van Nederland en van de VS. De bekende gegevens daarna invullen in de formule van Cantapulo.

6 Het gemiddeld aantal inwoners in de VS en het gemiddelde inkomen in de VS zijn te berekenen met de gegevens.

7 Bereken voor elke waarde van *M* (10, 15, 20, …., 35) de VEM-behoefte en daarna de procentuele afwijking ten opzichte van de waarde volgens de tabel bij 4% vet.

8 Vul in de formule voor $v = 4$ in.

9 De gegevens invullen in de formule voor *M* en daarna de VEM-behoefte uitrekenen.

10 De VEM-behoefte van een koe van 600 kg die nog geen melk geeft is 5000. Voor iedere 50 kg onder de 600 kg wordt de VEM-behoefte met 300 verlaagd. Bereken met deze gegevens de VEM-behoefte van de koe met een gewicht van 525 kg.

11 $M = (0{,}4 + 0{,}15v) \cdot m$ is gegeven.
VEM-behoefte van een koe die geen melk geeft = $6G + 1400$
(antwoord van vorige onderdeel)
VEM-behoefte van een koe van 600 kg die melk geeft = $5000 + 460M$
Bedenk door de laatste twee formules te vergelijken, welk deel van de VEM-behoefte voor melk wordt gebruikt en combineer bovenstaande gegevens.

12 Bedenk met welk deel van de formule het brandstofverbruik voor stops en wachten bepaald kan worden.

13 Bereken hoeveel seconden auto 1 en auto 2 er over doen om van P naar Q te komen. Wat betekent het verschil?

14 Bepaal voor auto 1 en voor auto 2 alle gegevens, dus *L*, *S*, *D*, *V*, *a*, *b*, *c* en bereken *B*.

15 Staangeld is € 5 per m^2 oppervlakte per dag en € 0,25 per kWh.

16 Staangeld is € 5 per m^2 (*O*) en € 0,25 per kWh (*E*), dus formule wordt …

17 Bedenk dat er per attractie € 50 aan vaste kosten per dag bij komen. *S* is de formule voor het staangeld voor een attractie per dag.

18 De totale kosten kun je berekenen. Welke gegevens heb je nodig om de opbrengst te kunnen berekenen? Denk aan aantal ritten per dag, aantal personen per rit, prijs voor een kaartje.

19 Maak gebruik van beide formules en let op de eenheden.

20 Let op de eenheden.

21 Gebruik de gegevens uit de tekst. Let op de eenheden. Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost.

22 De gegevens invullen en de formule herschrijven.

23 Oppervlakte = lengte × breedte

24 Bereken eerst de oppervlakte van de vijf vierkanten met waalformaat en daarna de oppervlakte met keiformaat.

25 Neem voor $w = 1$ en $k = 0$ en bedenk hoeveel vierkante meter het terras dan is. Bereken de kosten.

26 Er geldt dus $k = 0{,}5 \cdot w$

27 Gebruik de uitkomst van het vorige onderdeel en bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.

28 Gevraagd wordt naar *v*. Maak gebruik van de gegevens zoals $t = 20$ sec, $h = 7600$.

© ThiemeMeulenhoff
© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 6

Isoleren

V = warmteverlies in kcal
R = warmteweerstand
opp = oppervlakte dak in m^2
tijd = tijd in uren
ΔTemp = temperatuurverschil in °C tussen 18 °C (stookgrens) en gemiddelde buitentemperatuur

1 *Voor een dak geldt:*
opp = 30
R = 0,5
tijd = 6000
gemiddelde buitentemperatuur = 12 °C dus Δ*Temp* = 18 – 12 = 6
Bovenstaande gegevens invullen:
$V = \frac{opp \cdot tijd \cdot \Delta Temp}{R} = \frac{30 \cdot 6000 \cdot 6}{0{,}5} = 2160\,000$ kcal
1 m^3 aardgas levert 6050 kcal
Bij een warmteverlies van 2 160 000 kcal moet er $\frac{2\,160\,000}{6050} = 357$ m^3 extra aardgas verstookt worden.

2 Iedere toegevoegde cm steenwoldekens zorgt er voor dat *R* met 0,25 toeneemt.
Voor het warmteverlies *V* mag nog 119 m^3 extra aardgas gestookt worden.
Dit is $\frac{1}{3}$ deel van de vroegere waarde 357 m^3.

eerste manier, bereken R met de formule:
119 m^3 gas levert 119 · 6050 kcal = 719 950 kcal = *V*
Alle gegevens invullen in $V = \frac{opp \cdot tijd \cdot \Delta Temp}{R}$:
$719\,950 = \frac{30 \cdot 6000 \cdot 6}{0{,}5}$ oftewel $\frac{719\,950}{1} = \frac{1080\,000}{R}$
$719\,950 \cdot R = 1080\,000$ dus $R = \frac{1080\,000}{719\,950} = 1{,}5$
R = 1,5 dus de toename van *R* = 1,5 – 0,5 = 1
Per cm steenwoldeken neemt *R* met 0,25 toe dus dikte steenwoldekens is 4 cm.

tweede manier bepaal R door gebruik te maken van wat bekend is en inzicht in de formule:
Als de hoeveelheid extra aardgas door warmteverlies $\frac{1}{3}$ van de vroegere waarde is, dan is *V* ook $\frac{1}{3}$ van de vroegere waarde.
$V = \frac{opp \cdot tijd \cdot \Delta Temp}{R}$
In deze formule verandert de teller niet (opp · tijd · Δ*Temp* = 30 · 6000 · 6),
dus $V = \frac{1080\,000}{R}$ en *V* is $\frac{1}{3}$ deel van de vroegere waarde dus
R is 3 maal de vroegere waarde = 3 · 0,5 = 1,5
R = 1,5 dus de toename van *R* = 1,5 – 0,5 = 1
Per cm steenwoldeken neemt *R* met 0,25 toe dus dikte steenwoldekens is 4 cm.

© ThiemeMeulenhoff

3 *eerste manier, kijk naar de veranderingen:*

	situatie nu	situatie na isolatie	verschil
doorgangsverlies	3405 m^3	3405 · 0,45 = 1532 m^3	*1872,75 m^3
zon-instraling	657 m^3	600 m^3	57 m^3

Voor het doorgangsverlies is er 1872,75 m^3 minder nodig en voor de zon-instraling is er 57 m^3 meer nodig.
Totaal is er 1872,75 – 57 = 1815,75 = 1816 m^3 minder gas nodig.
**De afname van het doorgangsverlies kan ook in één keer berekend worden met 0,55 · 3405 = 1872,75 (er blijft 55% van 3405 over).*

tweede manier, kijk naar binnenkomende en uitgaande energie; het verschil is het gasverbruik:

situatie nu	binnenkomende energie
menselijke warmte	239 m^3
elektra	478 m^3
zon-instraling	600 m^3
totaal	1317 m^3

situatie nu	uitgaande energie
schoorsteenverlies	1748 m^3
verdamping	179 m^3
ventilatie	402 m^3
doorgangsverlies	1532,25 m^3 = 0,45 · 3405
afvalwater	240 m^3
totaal	4101,25 m^3

Het gasverbruik is 4101,25 – 1317 = 2784,25 m^3 en was 4600 m^3.
Er is een afname van 4600 – 2784,25 = 1815,75 of afgerond 1816 m^3.

McDonald's

4 In de VS waren er 250 miljoen mensen en 9500 vestigingen.
In Nederland waren er 15 miljoen mensen en *x* vestigingen.
De verhouding blijft gelijk, dus de volgende vergelijking oplossen:
$\frac{250}{9500} = \frac{15}{x}$ dus $x = \frac{15 \cdot 9500}{250} = 570$ vestigingen.

5 Totale inkomen in Nederland TINED = 253 miljard dollar en aantal inwoners is 15 miljoen. Dus gemiddeld inkomen in Nederland = $\frac{253 \text{ miljard}}{15 \text{ miljoen}} = 16\,867$ dollar.
Totale inkomen in VS TI_{VS} = 4950 miljard dollar; aantal inwoners is 250 miljoen.
Gemiddeld inkomen in VS = $\frac{4950 \text{ miljard}}{250 \text{ miljoen}} = 19\,800$ dollar.
In de VS waren er 250 miljoen mensen en 9500 vestigingen.
Per vestiging zijn dit gemiddeld $\frac{250 \text{ miljoen}}{9500} = 26\,316$ mensen.
$M_X = \frac{15 \text{ miljoen}}{26\,316} \cdot \frac{16\,867}{19\,800} = 485{,}5$ oftewel 485 of 486 vestigingen.

© ThiemeMeulenhoff

6 Gemiddeld aantal inwoners per vestiging in de VS = $\frac{250 \text{ miljoen}}{9\,500} = 26\,316$.

Gemiddeld inkomen in VS = $\frac{4\,950 \text{ miljard}}{250 \text{ miljoen}} = 19\,800$ dollar.

$M_X = \frac{\text{aantal inwoners van land } X}{26\,316} \cdot \frac{\text{gemiddeld inkomen in land } X}{19\,800} =$

$\frac{\text{aantal inwoners van land } X \cdot \text{gemiddeld inkomen in land } X}{26\,316 \cdot 19\,800} =$

$\frac{\text{totaal inkomen in land } X}{521\,056\,800} = \frac{TI_X}{521\,056\,800} \approx 1{,}92 \cdot 10^{-9} \cdot TI_x$ want $\frac{1}{521\,056\,800} \approx 1{,}92 \cdot 10^{-9}$

In de formule hierboven is TI_x in dollars.

Als TI_x in miljarden dollars wordt genomen dan wordt de formule $M_x \approx \frac{TI_x}{0{,}521}$

Veevoeder

7 Tabel voor melk met 4% vet

M in kg	VEM-beh. = 5000 + 460M	VEM-beh. volgens tabel 1	afwijking	in %
10	5000 + 460 · 10 = 9600	9500	$\frac{100}{9500} = 0{,}0105$	1,05
15	5000 + 460 · 15 = 11 900	11 800	$\frac{100}{11800} = 0{,}0085$	0,85
20	5000 + 460 · 20 = 14 200	14 100	$\frac{100}{14100} = 0{,}0071$	0,71
25	5000 + 460 · 25 = 16 500	16 450	$\frac{50}{16450} = 0{,}0030$	0,30
30	5000 + 460 · 30 = 18 800	18 850	$\frac{50}{18850} = 0{,}0027$	0,27
35	5000 + 460 · 35 = 21 100	21 300	$\frac{200}{21300} = 0{,}0094$	0,94

De grootste procentuele afwijking is 1,05% bij $M = 10$ kg.

8 $v = 4$ invullen in $M = (0{,}4 + 0{,}15v) \cdot m$ geeft
$M = (0{,}4 + 0{,}15 \cdot 4) \cdot m = (0{,}4 + 0{,}6) \cdot m = m$ oftewel $M = m$.

9 Werkelijke melkgift in kg is $m = 25$ kg en vetpercentage $v = 5\%$.
Dit invullen in $M = (0{,}4 + 0{,}15v) \cdot m$ geeft
$M = (0{,}4 + 0{,}15 \cdot 5) \cdot 25 = (0{,}4 + 0{,}75) \cdot 25 = 1{,}15 \cdot 25 = 28{,}75$.
$M = 28{,}75$ invullen in VEM-behoefte = 5000 + 460M geeft
VEM-behoefte = 5000 + 460 · 28,75 = 5000 + 13 225 = 18 225.

10 *De VEM-behoefte van een koe van 600 kg die nog geen melk geeft is 5000. Voor iedere 50 kg onder de 600 kg wordt de VEM-behoefte verlaagd met 300 VEM.*
De koe heeft een gewicht van 525 kg. Dat is 75 kg lager dan 600 kg. Haar VEM-behoefte wordt dan met 450 verlaagd tot 4550.
Invullen van $G = 525$ en VEM-behoefte = 4550 in VEM-behoefte = 6G + 1400 geeft
4450 = 6 · 525 + 1400.
Conclusie: de formule klopt voor een koe met een lichaamsgewicht van 525 kg.

© ThiemeMeulenhoff

11 $M = (0{,}4 + 0{,}15v) \cdot m$ ...1 zie opgave
VEM-behoefte van een koe die nog geen melk geeft = 6G + 1400 ...2 zie vorige onderdeel
VEM-behoefte van koe van 600 kg = 5000 + 460M ...3 zie opgave onder de tabel

Een combinatie van 2 en 3 geeft:
VEM behoefte van een willekeurige koe = 6G + 1400 + 460M ...4
...1 invullen in ...4 geeft VEM-behoefte = $6G + 1400 + 460((0{,}4 + 0{,}15v) \cdot m)$
VEM-behoefte = $6G + 1400 + 460(0{,}4m + 0{,}15v \cdot m) = 6G + 1400 + 184m + 69v \cdot m$

Brandstofverbruik

$B = a \cdot L + b \cdot S + c \cdot D$ is het brandstofverbruik in ml
L = ritlengte in km
S = aantal stops onderweg
D = totale wachttijd voor verkeerslichten in sec.
V = rijsnelheid in km/uur
$a = 170 - 4{,}55V + 0{,}049V^2$
$b = 0{,}0077V^2$
$c = 0{,}39$

12 $V = 50$ (km/uur) dus
$a = 170 - 4{,}55 \cdot 50 + 0{,}049 \cdot 50^2 = 65$ en $b = 0{,}0077 \cdot 50^2 = 19{,}25$
$L = 1$ (km)
$S = 2$ (2 stops)
$D = 40$ (sec.)
Totale brandstofverbruik $B = a \cdot L + b \cdot S + 0{,}39 \cdot D = 65 \cdot 1 + 19{,}25 \cdot 2 + 0{,}39 \cdot 40 =$ 119,1.
Brandstofverbruik voor de stops en het wachten = $b \cdot S + 0{,}39 \cdot D =$
$19{,}25 \cdot 2 + 0{,}39 \cdot 40 = 54{,}1$.
54,1 is $\frac{54{,}1}{119{,}1} \cdot 100 = 45{,}4\%$ of afgerond 45% van het totale brandstofverbruik.

13 *Bereken hoeveel seconden auto 1 en auto 2 er over doen om van P naar Q te komen.*
Het verschil tussen deze twee tijden is precies de wachttijd voor auto 2.
De af te leggen afstand is 600 m.
Het is handig om eerst de snelheid in m/sec te bepalen.

1 km/uur = 1000 m/uur = $\frac{1000}{3600}$ m/sec (1 uur = 3600 sec)

auto 1

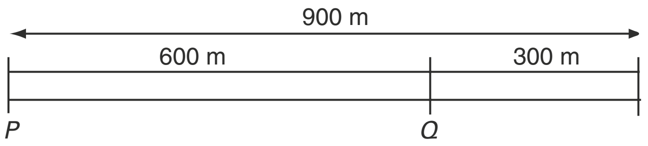
De snelheid is 50 km/uur = $\frac{50 \cdot 1000}{3600}$ m/sec = 13,889 m/sec
De tijd om van P naar Q te komen is $\frac{\text{afstand}}{\text{snelheid}} = \frac{600}{13{,}889} = 43{,}2$ sec.

auto 2

De snelheid is 70 km/uur = $\frac{70 \cdot 1000}{3600}$ m/sec = 19,444 m/sec
De tijd om van P naar Q te komen = $\frac{600}{19{,}444} = 30{,}9$ sec
Het stoplicht springt na 43,2 sec op groen dus auto 2 moet 43,2 – 30,9 = 12,3 seconden voor het stoplicht wachten oftewel ruim 12 seconden.

© ThiemeMeulenhoff

14 De eerste 900 meter na *P* ziet er als volgt uit.



	voor auto 1 geldt	voor auto 2 geldt
L	0,9 (900 meter = 0,9 km)	0,9
S	= 0 (auto 1 stopt niet in *Q*)	1 (1 stop bij *Q*)
D	0 (geen wachttijd)	12,3 (zie onderdeel 13 voor de wachttijd in *Q*)
V	50 (in km/uur)	70 (in km/uur)
a	$170 - 4{,}55 \cdot 50 + 0{,}049 \cdot 50^2 = 65$	$170 - 4{,}55 \cdot 70 + 0{,}049 \cdot 70^2 = 91{,}6$
b	$0{,}0077 \cdot 50^2 = 19{,}25$	$0{,}0077 \cdot 70^2 = 37{,}73$
c	0,39	0,39
B	$65 \cdot 0{,}9 + 19{,}25 \cdot 0 + 0{,}39 \cdot 0 = 58{,}5$ mL	$91{,}6 \cdot 0{,}9 + 37{,}73 \cdot 1 + 0{,}39 \cdot 12{,}3 = 124{,}967$ of afgerond 125 mL

Dus auto 2 verbruikt meer dan twee keer zo veel brandstof als auto 1
(125 is meer dan $2 \cdot 58{,}5 = 117$).

Kermis

15 Voor de berekening van het staangeld geldt: huur per m^2 per dag is € 5,- en € 0,25 per kWh.

	attractie	staangeld in euro's per dag
1	Reuzenrad	$320 \cdot 5 + 400 \cdot 0{,}25 = 1700{,}00$
2	Surfer	$300 \cdot 5 + 350 \cdot 0{,}25 = 1587{,}50$
3	Spookhuis	$350 \cdot 5 + 300 \cdot 0{,}25 = 1825{,}00$
4	Draaimolen	$230 \cdot 5 + 300 \cdot 0{,}25 = 1225{,}00$
5	Breakdance	$450 \cdot 5 + 500 \cdot 0{,}25 = 2375{,}00$
6	Vliegend Tapijt	$300 \cdot 5 + 450 \cdot 0{,}25 = 1612{,}50$

16 Het staangeld is € 5,00 huur per m^2 grond ($5 \cdot O$) en € 0,25 per kWh ($0{,}25 \cdot E$), dus $S = 5 \cdot O + 0{,}25 \cdot E$.

17 Per attractie komt er € 50,00 per dag bij. Dus het staangeld voor een attractie per dag wordt nu $S = 5 \cdot O + 0{,}25 \cdot E + 50$.

18 Eén ritje in de breakdance duurt 5 minuten, per uur zijn er dan 60 : 5 = 12 ritten.
De kermis is 10 uur per dag open, dus per dag zijn er $10 \cdot 12 = 120$ ritten.
De kosten aan staangeld (inclusief reinigingskosten) voor de breakdance zijn
S = € 2375,00 + € 50,00 = € 2425,00 (zie de onderdelen 15 en 17).
Een kaartje voor één rit kost € 4,00 per persoon. Als er per rit gemiddeld *p* personen meegaan, dan is de opbrengst per rit $4p$.
Per dag (120 ritten) is de opbrengst dan $120 \cdot 4p = 480p$.
Om de kosten van het staangeld er uit te halen moet de opbrengst minimaal gelijk zijn aan € 2425,-.

$480p \geq 2425$ dus $p \geq \frac{2425}{480}$ dus $p \geq 5{,}0521$.

Dus het aantal personen moet gemiddeld minimaal gelijk zijn aan iets meer dan 5.

© ThiemeMeulenhoff

Gewicht

19 *Maak gebruik van beide formules.*

$G = 110 \cdot L - 110$ formule 1

$BMI = \frac{1}{L^2} \cdot G$ formule 2

L is in meters en *G* in kg.
De lengte van de vrouw is 176 cm = 1,76 m.
Volgens formule 1 is haar ideale gewicht $G = 100 \cdot 1{,}76 - 110 = 66$ kg

$BMI = \frac{1}{1{,}76^2} \cdot 66 = 21{,}31$

Paslengte

20 *De gegevens uit de tekst bij de opgave zijn:*
v snelheid in km/uur
h = 0,21 meter
s = 0,35 meter (de afstand tussen twee opeenvolgende voetafdrukken van dezelfde voet)
$v = 2{,}81 \cdot s^{1{,}67} \cdot h^{-1{,}17} = 2{,}81 \cdot 0{,}35^{1{,}67} \cdot 0{,}21^{-1{,}17} = 3{,}0$
Conclusie: De snelheid is 3,0 km/uur.

21 *De gegevens uit de tekst bij de opgave zijn:*
v = 15 km/uur
h = 0,40 meter
s = ongeveer 1,5 meter
De vergelijking $15 = 2{,}81 \cdot s^{1{,}67} \cdot 0{,}40^{-1{,}17}$ moet worden opgelost.
oplossen met behulp van de grafische rekenmachine:
Voer in $y_1 = 15$ en $y_2 = 2{,}81 \cdot x^{1{,}67} \cdot 0{,}40^{-1{,}17}$
Kies een geschikt WINDOW bijv. [0, 3] x [0, 30]
CALC-intersect geeft $x \approx 1{,}43$ meter = 143 cm.
Conclusie: de paslengte *s* van de hond is ongeveer 143 cm.

22 *h invullen in de formule en daarna de formule herschrijven.*
$h = 0{,}40$ meter invullen geeft
$v = 2{,}81 \cdot s^{1{,}67} \cdot 0{,}4^{-1{,}17} = 2{,}81 \cdot 0{,}4^{-1{,}17} \cdot s^{1{,}67} = 8{,}209... \cdot s^{1{,}67} = c \cdot s^{1{,}67}$.
Dus $c = 8{,}209...$; afgerond op twee decimalen is $c = 8{,}21$.

Bestrating

23 *oppervlakte vierkant = lengte × breedte*
De lengte van het hele terras = breedte = $w + k + w = 2w + k$.
Oppervlakte van het hele terras $O = (2w + k) \cdot (2w + k) = (2w + k)^2$.

24 *oppervlakte rechthoek = lengte × breedte*
Oppervlakte grote vierkant = $w \cdot w = w^2$
Oppervlakte kleine vierkant in het midden = $k \cdot k = k^2$
Oppervlakte rechthoek = $k \cdot w$
O_w = oppervlakte van de vier even grote vierkanten + het kleine vierkant in het midden, dus
$O_w = 4 \cdot w^2 + k^2$
O_k = oppervlakte van de vier even grote rechthoeken dus

© ThiemeMeulenhoff

$O_k = 4 \cdot k \cdot w$
$O_w + O_k = 4 \cdot w^2 + k^2 + 4 \cdot k \cdot w = 4 \cdot w^2 + 4 \cdot k \cdot w + k^2$
$O = (2w + k)^2 = (2w + k) \cdot (2w + k) = 2w \cdot 2w + 2w \cdot k + k \cdot 2w + k^2 =$
$= 4 \cdot w^2 + 2k \cdot w + 2k \cdot w + k^2 = 4 \cdot w^2 + 4 \cdot k \cdot w + k^2$
Conclusie: $O_w + O_k = O$

25 *Bereken eerst de kosten voor w = 1 en k = 0 en bedenk hoeveel vierkante meter het terras dan is.*
Neem voor $w = 1$ en $k = 0$.
Het terras is dan 2 bij 2 meter, dus de oppervlakte is 4 m^2.
$K = 300 \cdot w^2 + 175w \cdot k + 75k^2 = 300 \cdot 1^2 + 175 \cdot 1 \cdot 0 + 75 \cdot 0^2 = 300$ euro voor 4 m^2.
Conclusie: de kosten per m^2 zijn 300 : 4 = 75 euro.

26 *lengte smalle kant rechthoek = 0,5 · lengte grote vierkant*
Er geldt dus $k = 0{,}5 \cdot w$. Dit invullen in $K = 300 \cdot w^2 + 175w \cdot k + 75k^2$ geeft
$K = 300 \cdot w^2 + 175w \cdot 0{,}5 \cdot w + 75 \cdot (0{,}5 \cdot w)^2 = 300 \cdot w^2 + 87{,}5 \cdot w^2 + 75 \cdot 0{,}25 \cdot w^2$
$= 300 \cdot w^2 + 87{,}5 \cdot w^2 + 18{,}75 \cdot w^2 = 406{,}25 \cdot w^2$

27 *Gebruik de formule uit onderdeel 26.*
Het te besteden bedrag is $K = 10\,500$ euro en $K = 406{,}25 \cdot w^2$.
De vergelijking $406{,}25 \cdot w^2 = 10\,500$ moet worden opgelost.
met de grafische rekenmachine
Neem bijvoorbeeld $y_1 = 10\,500$ en $y_2 = 406{,}25 \cdot x^2$
Kies een geschikt window bijvoorbeeld [0, 10] × [0, 20 000]
Intersect levert 5,08
$w = 5{,}08$ dus $k = 2{,}54$ (de helft van w)
$O = (2w + k)^2 = (2 \cdot 5{,}08 + 2{,}54)^2 = (12{,}7)^2 = 161{,}29$
Conclusie: de oppervlakte is afgerond 161 m^2.

Gewichtloosheid ervaren

28 *Op een hoogte van 7600 meter wordt de motor uitgeschakeld. De tijd van gewichtloosheid is minimaal 20 seconden. Bedenk welke vergelijkingen bij deze gegevens horen.*
$h = -9{,}81 \cdot t^2 + 0{,}38 \cdot v \cdot t + 7600$
Op $t = 0$ geldt $h = -9{,}81 \cdot 0^2 + 0{,}38 \cdot v \cdot 0 + 7600 = 7600$, dus op $t = 0$ wordt de motor uitgeschakeld (zie ook de figuur).
Op zijn vroegst op $t = 20$ mag de motor weer worden ingeschakeld.
Op $t = 20$ geldt $h = -9{,}81 \cdot 20^2 + 0{,}38 \cdot 20 \cdot v + 7600 = 3676 + 7{,}6 \cdot v$
Als de motor wordt ingeschakeld is $h = 7600$
Er moet gelden dat h minimaal 7600 meter is voor $t = 20$ dus $3676 + 7{,}6 \cdot v = 7600$
dus $7{,}6 \cdot v = 3924$
oftewel $v = \frac{3924}{7{,}6} = 516{,}32$, dus voor $v = 516{,}32$ duurt de gewichtloosheid 20 seconden.

Voor $t = 20$ sec geldt dat $h = 3676 + 7{,}6 \cdot v$. Hoe groter v hoe groter h, dus de gewichtloosheid duurt dan langer. De piloot zet de motor pas aan bij 7600 meter, dus bij een v groter dan 516,32 duurt de gewichtloosheid langer dan 20 seconden.
Conclusie: de gewichtloosheid duurt minimaal 20 seconden bij snelheden van afgerond 517 km/uur en groter.
Opmerking: de vergelijkingen mogen ook met de grafische rekenmachine opgelost worden.

© ThiemeMeulenhoff

7 Statistiek

De melkboer

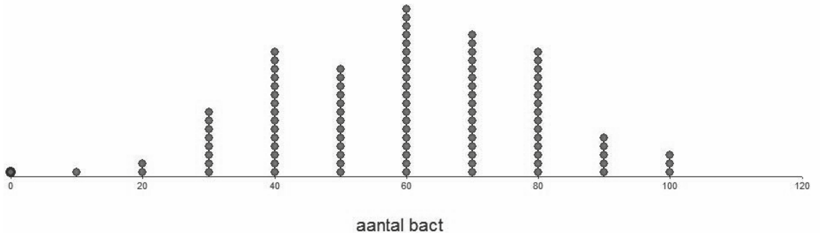
East Coast Milk (ECM) is een bedrijf in de VS dat elke dag melk bij honderd boeren in de regio ophaalt. Voordat de melk in de transporttank gaat, wordt bij elke boer een monster van de melk genomen. In het laboratorium van ECM wordt de melk onderzocht op het voorkomen van bacteriële vervuiling. Daartoe wordt in elk monster het aantal bacteriën per centiliter (cl) geteld.

De Public Health Service (PHS), verantwoordelijk voor de kwaliteitsbewaking, stelt als eis een maximum van 80 bacteriën per cl. In tabel 1 zie je een frequentietabel van de gevonden waarden in de honderd monsters van een dag. Het gemiddelde is gelijk aan 59 bacteriën per cl en de standaardafwijking is 20,3 bacteriën per cl. Er zijn bij deze gegevens nog twee andere representaties gemaakt, zie figuur 1 en figuur 2.

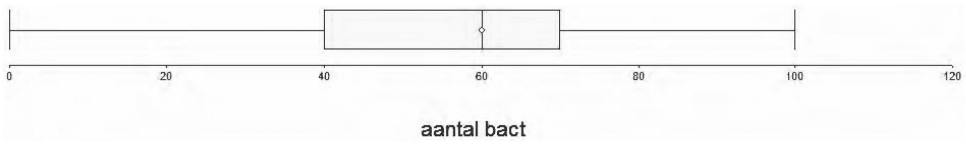
tabel 1

aantal bacteriën	*frequentie*
0	1
10	1
20	2
30	8
40	15
50	13
60	20
70	17
80	15
90	5
100	3
totaal	*100*

figuur 1



figuur 2



1 Welke van deze drie representaties is/zijn niet geschikt om het aantal overschrijdingen van de PHS norm vast te stellen? Licht je antwoord toe.

© ThiemeMeulenhoff

De totale hoeveelheid melk die elke dag wordt opgehaald, heet een **dagproductie**.

2 In de honderd monsters zitten gemiddeld 59 bacteriën per cl. Is dit ook het gemiddelde van de gehele dagproductie? Licht je antwoord toe.

Het laboratorium let goed op uitschieters omdat die op bijzonderheden kunnen wijzen. Vaak zijn dat meetfouten. Het laboratorium gebruikt de volgende vuistregel:
Een uitschieter ligt buiten het interval mediaan ± 1,5 × interkwartielafstand (interkwartielafstand = $Q_3 - Q_1$).

3 Ga na hoeveel uitschieters er zijn. Bij welke zou het om een meetfout kunnen gaan?

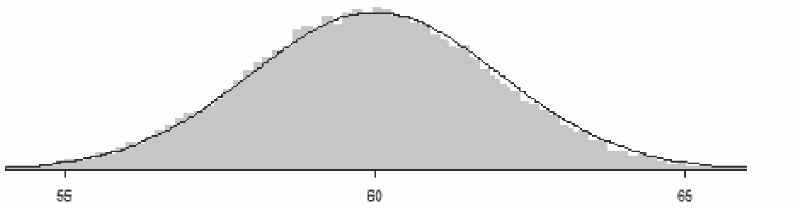
De twee monsters met de laagste waarde worden opnieuw gemeten. Dat levert in beide gevallen een waarde van 50 bacteriën per cl op.

4 Beredeneer, zonder een berekening te maken, dat met deze nieuwe meetwaarden het gemiddelde groter wordt en de standaardafwijking kleiner wordt.

5 Beredeneer wat er verandert aan de mediaan.

Men weet uit ervaring dat de monsters representatief zijn voor de dagproductie.
Voor elke dagproductie wordt een 95% betrouwbaarheidsinterval van het gemiddeld aantal bacteriën per cl gemaakt. Op een dag is het monstergemiddelde 60 bacteriën per cl en de standaardafwijking 20 bacteriën per cl. Deze waarden gebruikt men als modelgegevens voor de dagproductie.
Er is van het gemiddeld aantal bacteriën per cl in de honderd monsters een steekproevenverdeling gemaakt. Zie figuur 3.

figuur 3



6 Bepaal met behulp van de vuistregels voor de normale verdeling tussen welke grenzen 95% van de steekproefgemiddelden ligt. Bepaal hiervoor eerst de standaardafwijking, hiervoor kun je figuur 3 gebruiken.

Als zowel het gemiddelde als de standaardafwijking van het aantal bacteriën per cl in de dagproductie kleiner zijn dan respectievelijk 60 en 20, heeft dat gevolgen voor het 95% betrouwbaarheidsinterval.

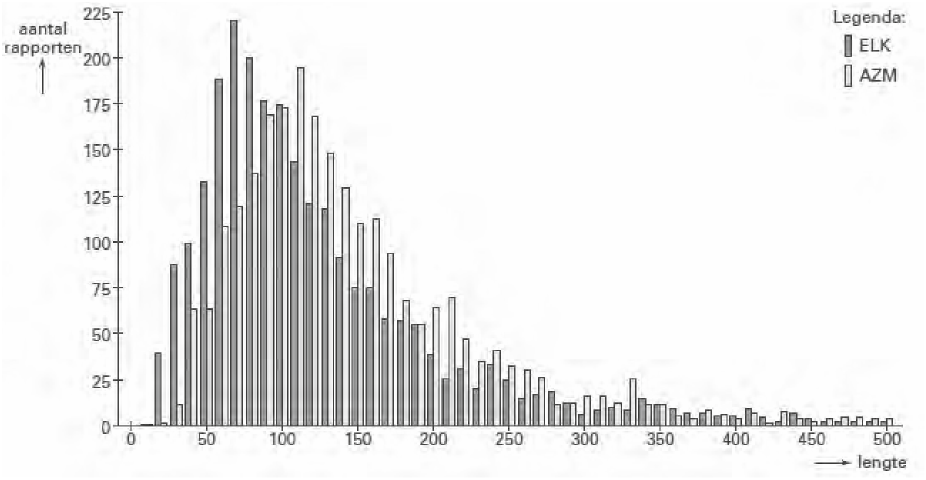
7 Beredeneer wat die gevolgen zijn.

© ThiemeMeulenhoff

Teksten vergelijken

In ziekenhuizen worden vaak medische rapporten geschreven. Bij een onderzoek naar de inhoud van dergelijke rapporten zijn 2500 rapporten van het Elkerliek Ziekenhuis (ELK) te Deurne vergeleken met 2500 rapporten van het Academisch Ziekenhuis Maastricht (AZM).
Van elk rapport is de lengte bepaald; de lengte van een rapport is het aantal woorden dat het bevat. In figuur 4 zijn de gegevens weergegeven in een gecombineerd staafdiagram met klassenbreedte 10. Zie figuur 4.

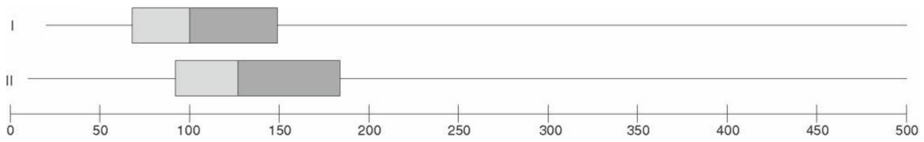
figuur 4



8 Beschrijf de overeenkomst in de vorm van de twee verdelingen.

Bij de gegevens over de lengtes van de rapporten zijn boxplots gemaakt. Zie figuur 5.

figuur 5



9 Welke van deze boxplots, I of II, hoort bij de rapporten van het ELK? Licht je antwoord toe.

10 Kun je op grond van de twee boxplots concluderen dat er een verschil is tussen de lengtes van de rapporten in de twee ziekenhuizen? Beargumenteer je antwoord.

Uit het onderzoek bleek dat de mediaan en het gemiddelde die horen bij de rapporten van het AZM niet even groot zijn.

11 Geef met een redenering, dus zonder een berekening, aan of je verwacht dat de mediaan groter of kleiner is dan het gemiddelde.

© ThiemeMeulenhoff

Verplaatsingen

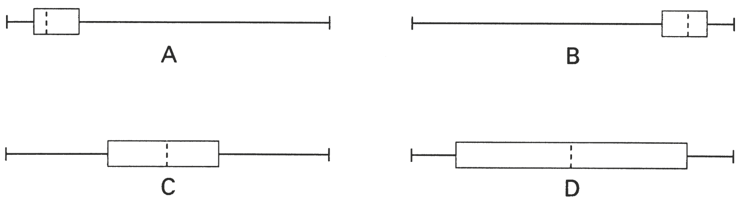
Mensen verplaatsen zich van de ene naar de andere plaats, vanwege werk, boodschappen, enzovoort. Het Centraal Bureau voor de Statistiek heeft onderzoek gedaan naar die verplaatsingen.
Daarbij werd zowel op de afstand als op de vervoerswijze gelet.
In tabel 2 staan resultaten van dat onderzoek. Hierin zijn de afstanden in klassen ingedeeld. In tabel 2 is bijvoorbeeld te zien dat van de 97 verplaatsingen in de categorie 'Autobestuurder' er 19 waren met een afstand tussen 1 en 2,5 km.

tabel 2 verplaatsingen naar afstand en vervoerswijze

afstand	autobestuurder	openbaar vervoer	fietsen	lopen
0 –0,5 km	1	0	5	18
0,5–1 km	4	0	14	16
1–2,5 km	19	1	37	18
2,5–3,7 km	12	2	13	3
3,7–5 km	7	1	5	2
5–7,5 km	14	2	9	1
7,5–10 km	6	1	3	0
10–15 km	10	2	3	0
15–20 km	6	1	2	0
20 km of meer	18	6	0	0
totaal	97	16	91	58

Stel dat in de categoriën 'Fietsen' en 'Lopen' van tabel 2 de waarnemingen binnen elke klasse gelijkmatig zijn verdeeld.

Hieronder zie je vier boxplots A, B, C en D.



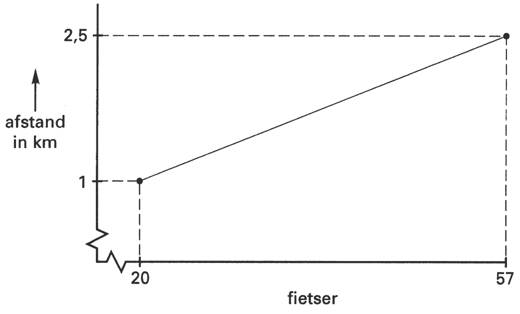
12 Welke van deze vier boxplots past het best bij de categorie 'Lopen'? Licht je antwoord toe.

13 Leg uit waarom de mediaan van de categorie 'Lopen' in de klasse 0,5–1 km ligt.

Bekijk nu de categorie 'Fietsen'.
De mediaan van deze categorie is de afstand die hoort bij fietser nummer 46.
Deze mediaan kan vrij nauwkeurig worden berekend.
In tabel 1 is af te lezen dat 5 + 14 = 19 fietsers minder dan 1 km hebben gereden en 5 + 14 + 37 = 56 fietsers minder dan 2,5 km. We nemen aan:
- bij fietser nummer 20 hoort de afstand 1 km;
- bij fietser nummer 57 hoort de afstand 2,5 km.

© ThiemeMeulenhoff

Hieronder zijn de fietsers en hun afstand in een grafiek weergegeven. Gemakshalve is niet voor elke fietser afzonderlijk een punt getekend, maar is een lijn getrokken.



14 Bereken door lineair interpoleren de mediaan van de categorie 'Fietsen'.

Als gegevens in klassen zijn ingedeeld, kan het gemiddelde niet precies worden berekend. Meestal gebruikt men de klassemiddens om een schatting van het gemiddelde te berekenen. Als in tabel 2 de waarnemingen gelijkmatig binnen hun klassen zijn verdeeld, zal de echte gemiddelde afstand vrijwel gelijk zijn aan die schatting. Liggen de waarnemingen echter voornamelijk links in hun klasse, dus aan het begin van elke klasse, dan zal de echte gemiddelde afstand kleiner zijn dan die schatting.

15 Bereken de kleinste waarde van de echte gemiddelde afstand voor de categorie 'Autobestuurders' die mogelijk is. Licht je werkwijze toe.

Scheve verdelingen

Bij archeologische opgravingen vindt men vaak veel gebruiksvoorwerpen zoals bijlen. Deze werden vroeger met de hand gemaakt. Daardoor zijn de afmetingen niet steeds precies hetzelfde.

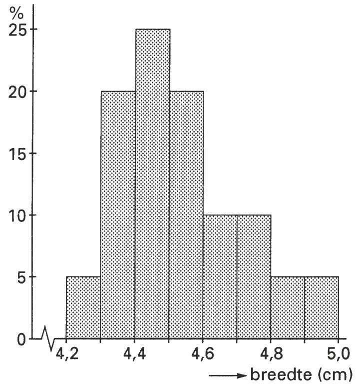
figuur 6

schets: bovenaanzicht:

Vreemd genoeg vindt men bij dit soort onderzoek in plaats van het verwachte symmetrische histogram vaak een scheef histogram zoals bijvoorbeeld figuur 7.

© ThiemeMeulenhoff

figuur 7



Bij een symmetrisch histogram is het gemiddelde gelijk aan de mediaan. Bij een scheef histogram is dit in het algemeen niet het geval.
Bij het histogram van figuur 7 is de mediaan 4,5.

16 Is de gemiddelde breedte van deze bijlen groter of kleiner dan de mediaan? Licht je antwoord toe.

Het ene histogram noemen we schever dan het andere.
Een maat voor de scheefheid is:

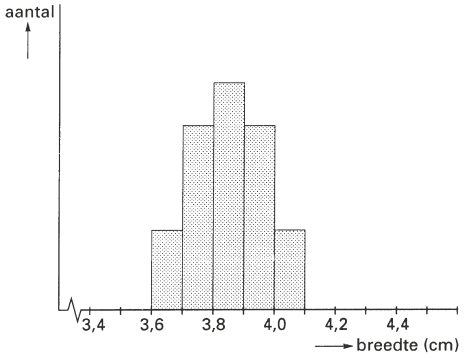
$$S = \frac{(Q_3 - md) - (md - Q_1)}{(Q_3 - md) + (md - Q_1)}$$

Hierbij is md de mediaan, Q_1 het eerste kwartiel en Q_3 het derde kwartiel.

We kijken naar het histogram van figuur 7.

17 Laat met een berekening met deze formule zien dat S positief is. Geef daarbij duidelijk aan hoe je Q_1 en Q_3 (door berekening of aflezing) gevonden hebt.

Door een ongelukkige keuze voor een klasse-indeling is het echter mogelijk dat het bijbehorende histogram niet symmetrisch zal zijn.
Naast de 'ongelukkige' keuze voor een klasse-indeling is er nog een andere verklaring voor de scheefheid van het histogram. Het is natuurlijk mogelijk dat de bijlen niet uit één smederij afkomstig zijn, maar uit twee verschillende. Neem aan dat bij elk van deze twee smederijen het histogram symmetrisch is, maar dat de gemiddelden en de standaardafwijkingen verschillend zijn. Op de volgende bladzijde zie je het histogram bij een van deze smederijen getekend.

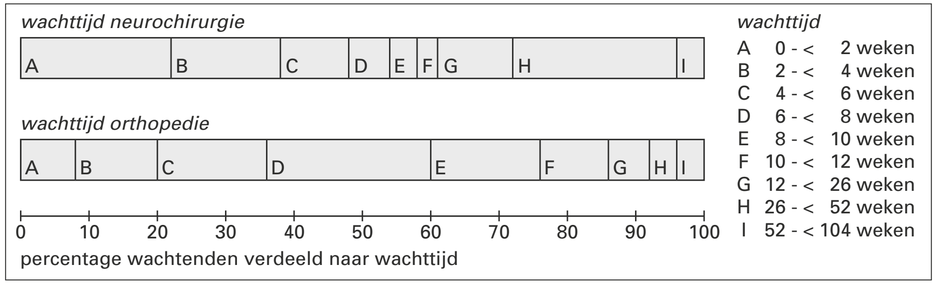


18 Teken in de figuur hierboven een symmetrisch histogram bij de andere smederij en laat zien dat het histogram van de twee smederijen samen een scheef histogram is.

Wachtlijsten

In de gezondheidszorg staan veel mensen op een wachtlijst, bijvoorbeeld voor een behandeling in een ziekenhuis of voor een plaats in een verzorgingshuis.
De regering wil dat minder mensen op een wachtlijst staan. Ook wil men dat mensen die op een wachtlijst staan, minder lang hoeven te wachten.
Voor alle specialismen, waaronder neurochirurgie en orthopedie, heeft men de wachtlijsten in kaart gebracht. Men heeft bekeken hoeveel mensen op een wachtlijst staan en hoelang ze moeten wachten.
In figuur 8 staat een weergave van de 'wachttijd' bij neurochirurgie en bij orthopedie.

figuur 8



In deze figuur kun je bijvoorbeeld over de wachtenden op een behandeling bij neurochirurgie aflezen:

– bijna 40% van de mensen is binnen 4 weken aan de beurt,
– meer dan 25% moet 26 weken of langer wachten.

19 Hoeveel procent van de wachtenden bij neurochirurgie moet tussen de 4 en de 10 weken wachten? Licht je antwoord toe.

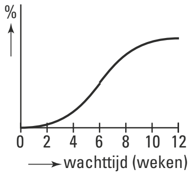
Bij neurochirurgie is de gemiddelde wachttijd 17 weken. Bij orthopedie is de gemiddelde wachttijd korter. Met behulp van de klassenmiddens van de klassen A tot en met I van orthopedie kan dat gemiddelde worden geschat.

20 Bereken met behulp van de klassenmiddens de gemiddelde wachttijd bij orthopedie. Geef je antwoord in gehele weken.

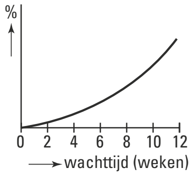
Aan de hand van figuur 8 kun je met behulp van lineaire interpolatie een schatting geven van het derde kwartiel van de wachttijd bij neurochirurgie.

21 Bereken op deze manier dit derde kwartiel. Geef je antwoord in gehele weken.

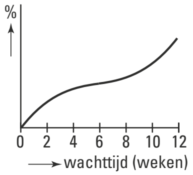
Hieronder zijn vier cumulatieve frequentiepolygonen (I, II, III en IV) voor de eerste 12 weken getekend.



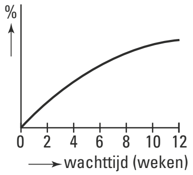
I



II



III



IV

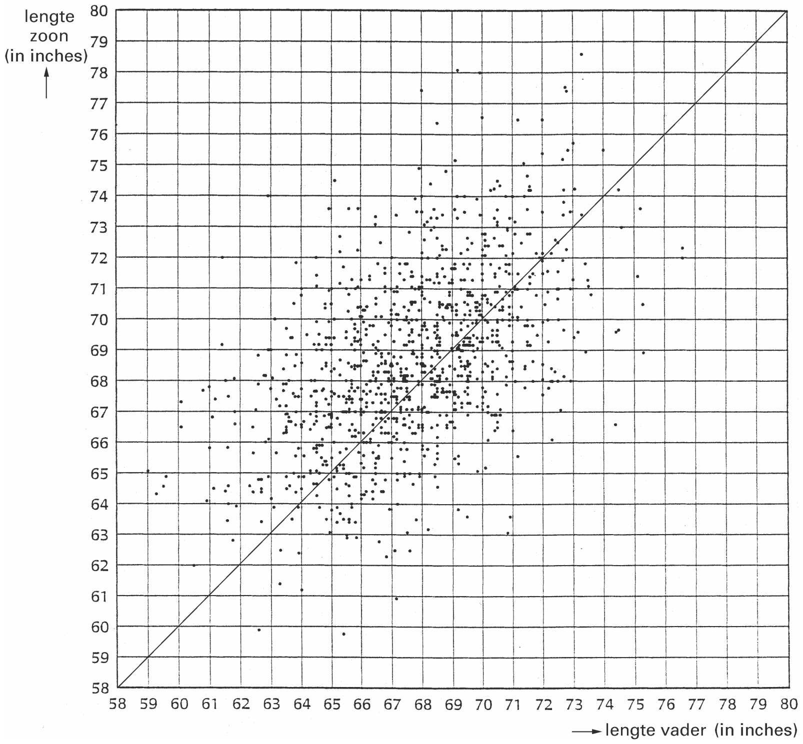
22 Welke van deze vier cumulatieve frequentiepolygonen past het best bij de wachttijden tot 12 weken bij neurochirurgie uit figuur 8? Licht je antwoord toe.

Vaders en zonen

De Engelsman Karl Pearson was een van de grondleggers van de moderne statistiek. Hij heeft zich vaak bezig gehouden met statistiek over biologische onderwerpen. Ongeveer een eeuw geleden onderzocht hij, samen met zijn collega Alice Lee, of in Engeland zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders. Zij vergeleken de lengtes van 1064 zonen en hun vaders. De zonen studeerden allen aan een Londense universiteit.

23 Is hier sprake van een aselecte steekproef? Licht je antwoord toe.

In de figuur, op de volgende bladzijde, zie je een overzicht van de resultaten. Elke stip stelt één vader-zoon-paar voor. De lengte van de vader staat op de horizontale as, de lengte van de zoon op de verticale as. De lengtes zijn gegeven in inches (1 inch = 2,54 cm).



In de figuur is een lijn getekend. Als een stip op deze lijn ligt, dan zijn de vader en de zoon *precies even lang*.
We noemen een vader en zijn zoon *ongeveer even lang* als ze minder dan 2 inch in lengte verschillen.

24 Teken in de figuur het gebied waarin de punten liggen die horen bij vaders en zonen die *ongeveer even lang* zijn. Licht je werkwijze toe.

25 Kun je met behulp van het in vraag 24 getekende gebied concluderen dat de zonen gemiddeld langer zijn dan hun vaders? Licht je antwoord toe.

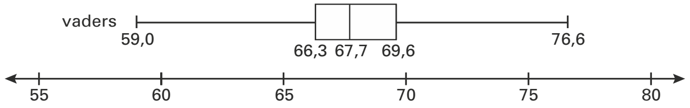
In de bijlage op de volgende bladzijde zie je een boxplot van de lengtes van de 1064 vaders. De vijf kenmerkende getallen van de boxplot staan erbij.

In de bijlage vind je ook een lijst met de lengtes van alle 1064 zonen. De getallen in deze lijst staan op volgorde van grootte. Na iedere 10 getallen staat een streepje. Na iedere 50 getallen staat bij het streepje hoeveel getallen er tot daar staan.

26 Teken de boxplot van de lengtes van de zonen in de figuur op de bijlage boven de boxplot van de vaders. Schrijf de vijf kenmerkende getallen van de boxplot erbij.

bijlage bij vraag 26

59.7	64.5	65.5	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.8	71.3	72.0	73.4
59.9	64.5	65.5	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.7	70.2	70.8	71.3	72.0	73.5
60.9	64.5	65.5	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.7	70.2	70.8	71.3	72.1	73.5
61.4	64.5	65.5	66.3	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.7	70.2	70.8	71.3	72.1	73.5
62.0	64.6	65.5	66.4	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.8	70.2	70.8	71.3	(950) 72.1	73.5
62.3	64.6	65.5	66.4	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.8	70.3	70.8	71.3	72.1	73.5
62.4	64.6	65.5	66.4	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	(700) 69.8	70.3	70.8	71.3	72.2	73.6
62.5	64.6	65.6	66.4	66.9	67.3	67.7	68.0	68.4	68.9	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.5	64.6	65.6	66.4	66.9	67.3	67.7	(450) 68.1	68.4	68.9	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.5	64.6	65.6	66.4	66.9	67.3	67.7	68.1	68.5	68.9	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.7	64.7	65.6	(200) 66.4	66.9	67.3	67.7	68.1	68.5	69.0	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.8	64.7	65.6	66.4	66.9	67.3	67.7	68.1	68.5	69.0	69.3	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.8	64.7	65.6	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.3	70.8	71.4	72.2	73.6
62.9	64.7	65.6	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.3	70.9	71.4	72.3	73.6
62.9	64.7	65.6	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.3	70.9	71.4	72.3	73.8
63.0	64.8	65.7	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.3	70.9	71.4	72.3	73.9
63.1	64.8	65.7	66.5	66.9	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.4	70.9	71.4	72.3	73.9
63.1	64.8	65.7	66.5	67.0	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.8	70.4	70.9	(900) 71.4	72.3	74.0
63.1	64.8	65.7	66.5	67.0	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.4	72.3	74.0
63.2	64.8	65.7	66.5	67.0	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	(650) 69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.3	74.0
63.4	64.8	65.7	66.5	67.0	67.4	67.7	68.1	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.0
63.4	64.9	65.7	66.5	67.0	67.4	(400) 67.8	68.1	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.0
63.4	64.9	65.7	66.5	67.0	67.4	67.8	68.2	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.0
63.4	64.9	(150) 65.8	66.5	67.0	67.4	67.8	68.2	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.0
63.4	64.9	65.8	66.5	67.0	67.5	67.8	68.2	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.4	74.2
63.5	64.9	65.8	66.5	67.0	67.5	67.8	68.2	68.5	69.0	69.4	69.9	70.4	70.9	71.5	72.5	74.2
63.5	64.9	65.8	66.5	67.0	67.5	67.8	68.2	68.5	69.1	69.4	69.9	70.4	71.0	71.5	72.5	74.2
63.5	64.9	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.4	69.9	70.4	71.0	71.5	72.5	74.2
63.5	64.9	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.4	69.9	70.4	71.0	71.6	72.5	74.3
63.5	64.9	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.4	69.9	70.4	71.0	71.6	72.6	74.3
63.6	64.9	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.5	70.0	70.4	(850) 71.0	71.6	72.6	74.3
63.6	65.0	65.8	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.5	70.0	70.4	71.0	71.6	72.6	74.3
63.7	65.0	65.9	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	(600) 69.1	69.5	70.0	70.4	71.0	71.6	72.7	74.3
63.8	65.0	65.9	66.6	67.0	67.5	67.8	68.2	68.6	69.1	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.4
63.8	65.0	65.9	66.6	67.0	(350) 67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.5
63.8	65.0	65.9	66.6	67.0	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.5
63.9	(100) 65.0	65.9	66.6	67.0	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.7
63.9	65.0	65.9	66.6	67.1	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.7	74.8
63.9	65.0	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.0	71.7	72.8	74.9
63.9	65.0	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.2	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.7	72.8	75.1
63.9	65.0	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.3	68.6	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.7	72.8	75.2
63.9	65.1	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.3	68.7	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.7	72.8	(1050) 75.2
64.0	65.1	66.0	66.6	67.1	67.5	67.9	68.3	68.7	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.8	72.8	75.4
64.0	65.1	66.0	66.7	67.1	67.5	68.0	68.3	68.7	69.2	69.5	70.0	(800) 70.5	71.1	71.8	72.9	75.5
64.0	65.1	66.0	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.5	70.0	70.5	71.1	71.8	73.0	75.5
64.1	65.1	66.0	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	(550) 68.7	69.2	69.6	70.0	70.5	71.1	71.8	73.0	75.7
64.2	65.2	66.1	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.0	70.5	71.1	71.8	73.0	76.4
64.2	65.2	66.1	66.7	(300) 67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.0	70.5	71.1	71.8	73.1	76.5
64.2	65.2	66.1	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.0	70.6	71.2	71.8	73.1	76.5
(50) 64.3	65.3	66.1	66.7	67.1	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.0	70.6	71.2	71.8	73.1	76.6
64.3	65.3	66.1	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.1	70.6	71.2	71.8	73.2	77.4
64.3	65.3	66.2	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.7	69.2	69.6	70.1	70.6	71.2	71.8	73.2	77.4
64.3	65.3	66.2	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.8	69.2	69.6	70.1	70.6	71.2	71.8	73.2	77.5
64.3	65.3	66.2	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.8	69.2	69.7	70.1	70.6	71.2	71.9	73.3	78.0
64.4	65.3	66.3	66.7	67.2	67.6	68.0	68.3	68.8	69.3	69.7	70.1	70.6	71.2	71.9	(1000) 73.3	78.1
64.4	65.3	66.3	66.7	67.2	67.7	68.0	68.3	68.8	69.3	69.7	70.1	70.6	71.3	71.9	73.3	78.6
64.4	65.4	66.3	66.7	67.2	67.7	68.0	68.3	68.8	69.3	69.7	(750) 70.1	70.6	71.3	72.0	73.3	
64.4	65.4	66.3	66.8	67.2	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.1	70.7	71.3	72.0	73.3	
64.4	65.4	66.3	66.8	67.2	67.7	68.0	(500) 68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	
64.4	65.4	66.3	66.8	67.2	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	
64.4	65.4	66.3	(250) 66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	
64.4	65.4	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	
64.5	65.5	66.3	66.8	67.3	67.7	68.0	68.4	68.8	69.3	69.7	70.2	70.7	71.3	72.0	73.4	



© ThiemeMeulenhoff

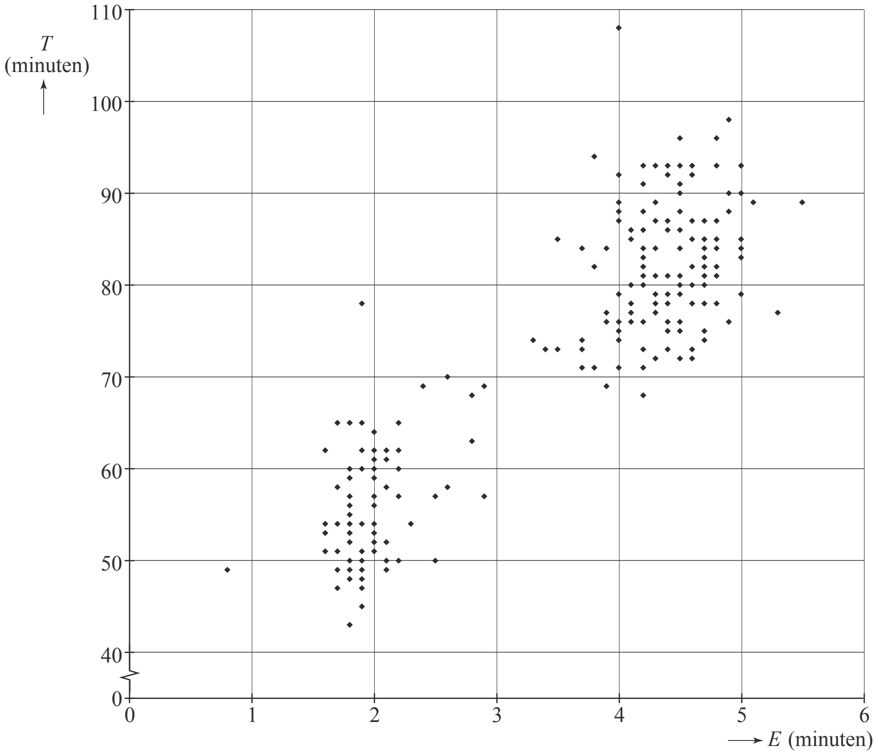
Erupties

Vulkanen kunnen heel lang niet-actief zijn. Dan zijn er geen erupties (uitbarstingen). Tijdens een actieve periode van een vulkaan zijn er wel erupties.
Bij een eruptie komt er gesmolten steen, gas en as uit de vulkaan. Dat duurt een tijdje. Daarna is de vulkaan weer rustig, totdat de volgende eruptie begint.

We bekijken in deze opgave één actieve periode van één vulkaan. De actieve periode start bij de eerste eruptie.
Wetenschappers hebben tijdens deze actieve periode gemeten:
– hoe lang iedere eruptie duurt: de eruptieduur;
– hoe lang de vulkaan rustig is tot de volgende eruptie begint: de tussentijd tot de eerstvolgende eruptie.

Tijdens deze actieve periode was de langste tijd tussen twee erupties 108 minuten.
Na de allerlaatste eruptie was de vulkaan weer lange tijd rustig.
De eruptieduur is gemeten in tienden van een minuut nauwkeurig en de tussentijd in gehele minuten. De metingen zijn verwerkt in figuur 9. De eruptieduur *E* staat langs de horizontale as, de tussentijd tot de eerstvolgende eruptie *T* staat langs de verticale as.

figuur 9



Het meest linkse punt in de figuur hoort bijvoorbeeld bij een eruptie die 0,8 minuut duurde en waarna de vulkaan 49 minuten rustig was.

© ThiemeMeulenhoff

In deze actieve periode zijn er 184 erupties geweest. De eerste 183 zijn weergeven in figuur 9. De allerlaatste eruptie van deze actieve periode duurde 1,7 minuut.

De allerlaatste eruptie van een actieve periode kan niet in zo'n figuur worden weergegeven.

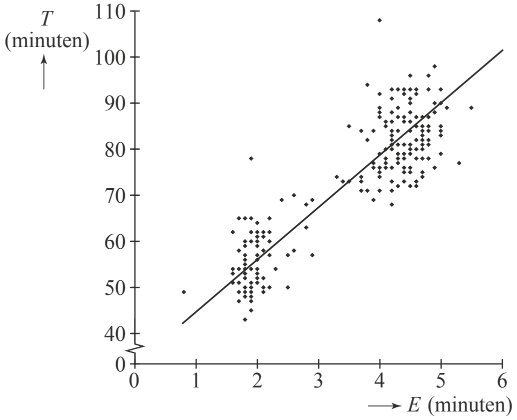
27 Geef hier een verklaring voor.

We bekijken alleen de gegevens uit voorgaand figuur en laten de 184^e eruptie buiten beschouwing. Je kunt van de 183 erupties de gemiddelde duur van de tussentijd T schatten. Het blijkt dat de tussentijd gemiddeld ongeveer 73 minuten bedraagt.

28 Toon aan dat deze actieve periode van de vulkaan langer heeft geduurd dan een week.

In figuur 10 is een lijn getrokken die zo goed mogelijk bij de metingen past.

figuur 10



Deze lijn gaat door de punten (2, 56) en (5, 90).
Met behulp van deze lijn kun je bij een gegeven eruptieduur een grove schatting maken voor de tussentijd die je daarbij kunt verwachten.

29 Bereken met behulp van lineair extrapoleren de geschatte tussentijd bij een eruptieduur van 6 minuten.

Ga er van uit dat de tussentijden bij een eruptieduur van 4,5 minuut normaal verdeeld zijn met een standaardafwijking van 4 minuten. Je kunt dan met een betrouwbaarheid van 95% aangeven tussen welke twee waarden de tussentijd tot de volgende eruptie zal liggen bij een eruptieduur van 4,5 minuut.

30 Geef deze twee waarden.

Piet beweert op basis van de gegevens uit figuur 10 te kunnen concluderen dat de eruptieduur groter wordt naarmate de tussentijd tussen twee erupties groter is. Harm is het niet met Piet eens.

31 Geef een argument dat Harm kan gebruiken om Piet te overtuigen van zijn ongelijk.

© ThiemeMeulenhoff

Wasdrogers

Bij een onderzoek onder huishoudens in Nederland is één van de onderzoeksvragen hoe groot het percentage huishoudens is dat een wasdroger bezit.

32 Wat is de populatie van dit onderzoek?

33 Hoe kun je aan de onderzoeksvraag zoals die hierboven is geformuleerd, zien dat het gaat om proporties?

Bij proporties geldt voor de standaardafwijking van de steekproevenverdeling de formule

$$S = \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}}$$

Hierin is p de populatieproportie en n de omvang van de steekproef.

Om de standaardafwijking te schatten gaat men er op grond van een eerder onderzoek vooralsnog van uit dat 40% van de huishoudens een wasdroger heeft.

Er geldt bij benadering: $S = \frac{0,49}{\sqrt{n}}$

34 Toon dit aan.

Men wil de steekproef zo groot maken dat de standaardafwijking S hoogstens 0,015 is.

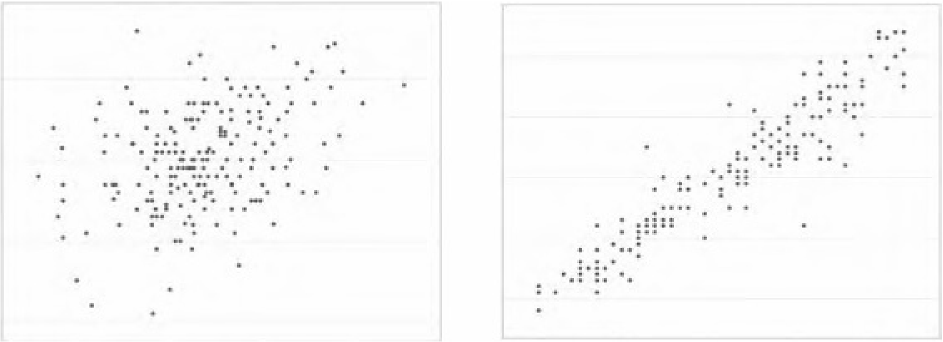
35 Bereken hoe groot de steekproef dan moet zijn.

© ThiemeMeulenhoff

Huwelijken

In een onderzoek onder 199 echtparen is onder meer gevraagd naar de lengte en de leeftijd van de man en de vrouw. Er werd onder andere onderzocht of er sprake is van statistische samenhang tussen de leeftijden van beide partners en tussen de lengtes van beide partners.
Dit leidde tot de twee puntenwolken in figuur 11.

figuur 11



Een van beide puntenwolken heeft betrekking op de leeftijden van de twee huwelijkspartners, de andere puntenwolk heeft betrekking op de lengte van beide huwelijkspartners. In beide puntenwolken zijn de gegevens van de man op de horizontale as uitgezet en die van de vrouw op de verticale as.

Op basis van de vorm van de puntenwolk kun je beredeneren dat de puntenwolk links zeer waarschijnlijk betrekking heeft op de lengte en de puntenwolk rechts op de leeftijd.

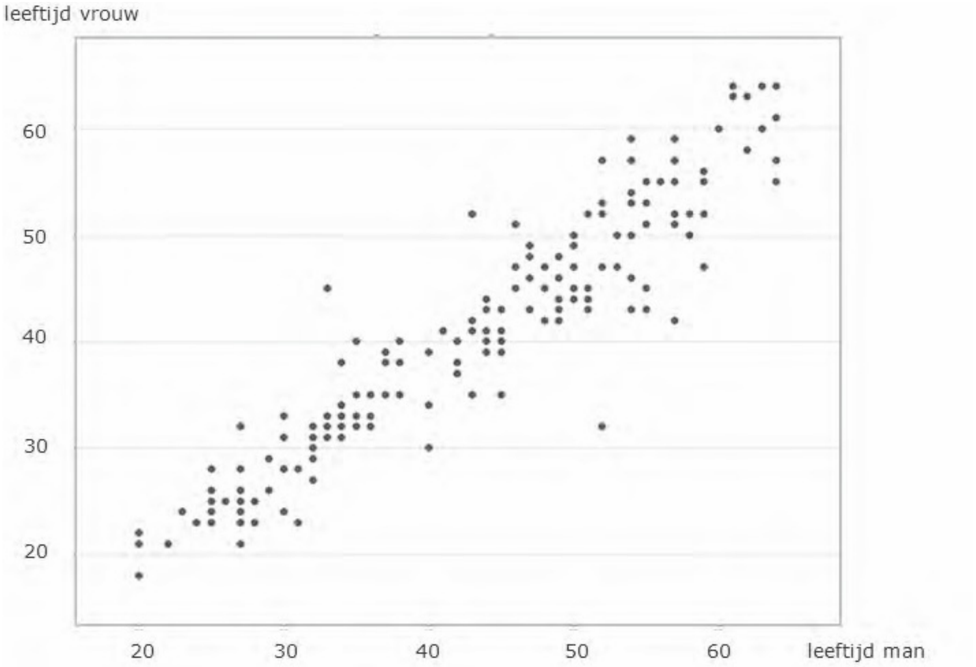
36 Geef een dergelijke redenering.

Op basis van dergelijke puntenwolken wil men soms een schatting maken van de lengte of de leeftijd van een vrouw als men de lengte of de leeftijd van de man kent. Hoewel dit soort schattingen altijd een grote mate van onzekerheid hebben, is het toch mogelijk om aan te geven bij welk van de twee puntenwolken een dergelijke schatting het meest betrouwbaar zal zijn.

37 Beredeneer bij welk van de twee puntenwolken in figuur 11, een dergelijke schatting het meest betrouwbaar zal zijn.

De rechter puntenwolk staat in figuur 12 vergroot afgedrukt, waarbij nu de leeftijden langs de assen zijn geplaatst.

figuur 12



38 Onderzoek met behulp van figuur 12 of het in de betreffende 199 huwelijken vaker voorkomt dat de man ouder is dan de vrouw of dat het omgekeerde juist vaker voorkomt. Licht je antwoord toe.

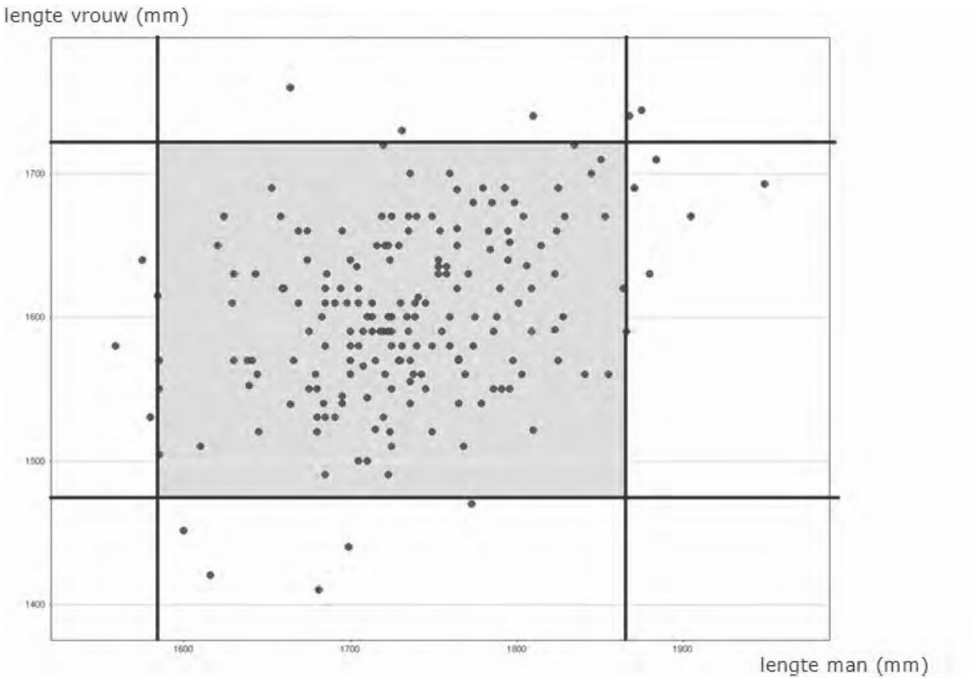
In de tabel staan enkele kentallen uit het onderzoek.

tabel

	leeftijd man (jaren)	leeftijd vrouw (jaren)	lengte man (cm)	lengte vrouw (cm)
gemiddelde	42,6	40,7	173	160
minimum	20	18	156	141
maximum	64	64	195	176
standaardafwijking	11,6	11,4	6,9	6,2

De lengtes en de leeftijden van de huwelijkspartners zij bij benadering normaal verdeeld. In figuur 13 is nogmaals de puntenwolk van de lengtes afgebeeld met daarin een grijze rechthoek die wordt begrensd door vier lijnen.
De twee verticale lijnen zijn getekend bij waarden waartussen 95% van de lengtes van de mannen liggen. De twee horizontale lijnen zijn getekend bij de waarden waartussen 95% van de lengtes van de vrouwen liggen.

figuur 13



39 Bereken in één decimaal nauwkeurig de lengtes die bij de vier lijnen horen.

Omdat 5% van de mannen en 5% van de vrouwen buiten de berekende grenzen zal vallen, concludeert de onderzoeker dat in totaal 10% van de punten in de puntenwolk buiten de getekende rechthoek zal vallen.

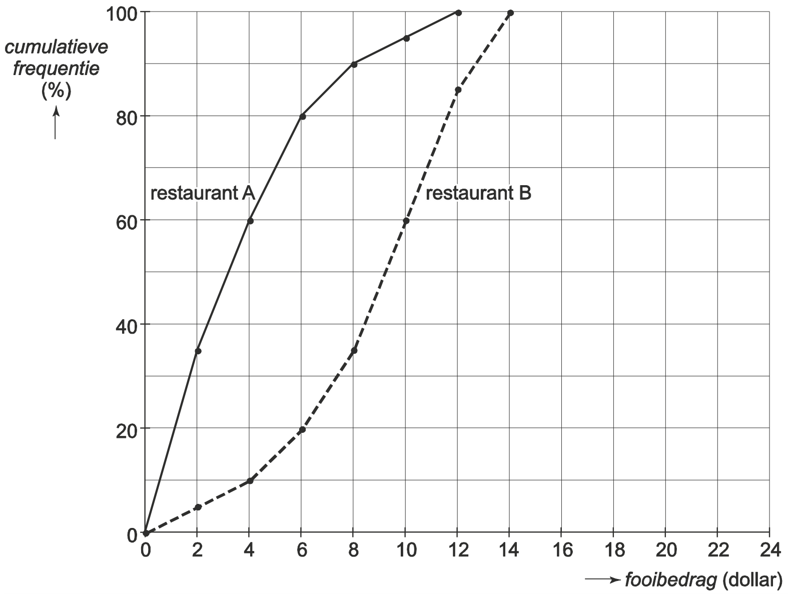
40 Beargumenteer of je het met die conclusie eens bent of niet.

Fooien

In de Verenigde Staten is het gebruikelijk dat je in een restaurant een flinke fooi geeft aan degene die je bedient. Het basisloon is er zeer laag en daardoor is het bedienend personeel veel meer afhankelijk van fooien dan in Nederland.
In New York bestudeerde een onderzoeker welke fooien er gegeven werden bij 500 rekeningen in restaurant A en 500 rekeningen in restaurant B.

In figuur 14 zijn de cumulatieve relatieve frequentiepolygonen van de fooien van de restaurants A en B getekend.

figuur 14



41 In welk restaurant werd in totaal meer fooi gegeven? Licht je antwoord toe.

42 In welk restaurant werden er relatief meer fooien tussen de 6 en de 8 dollar gegeven? Licht je antwoord toe.

Ruim driekwart van de fooien in restaurant B is hoger dan de 75% laagste fooien van restaurant A.

43 Leg uit hoe je dit in de figuur terug kunt vinden.

Op grond van figuur 14 kun je met behulp van het formuleblad (achterin deze examenbundel) met twee verschillende vuistregels een uitspraak doen over het verschil tussen de fooien in restaurant A en die in restaurant B.

44 Beschrijf hoe je met twee verschillende vuistregels dit verschil kunt bepalen en geef bij beide de conclusie: is het verschil groot, middelmatig of gering?

Hints bij hoofdstuk 7

1 Het gaat over aantallen. Ga na in welke representatie het niet over aantallen gaat.

2 Ga na wat van invloed is op het gemiddelde van de totale dagproductie.

3 Lees uit de boxplot de waarden af die nodig zijn voor de berekening van de grenzen van het interval.

4 Bedenk hoe de nieuwe tabel aangepast moet worden en wat dit doet met de standaardafwijking en het gemiddelde.

5 In de boxplot lees je de waarde van de mediaan af. Kijk naar de ligging van 0 en 10 ten opzichte van deze mediaan en de ligging van 50 ten opzichte van deze mediaan.

6 De standaarddeviatie is de afstand van het midden 60 tot het buigpunt (waar de grafiek van hol naar bol overgaat).

7 Beantwoord eerst de twee vragen: "Wat gebeurt er met de kromme als het gemiddelde kleiner wordt? Wat gebeurt er met de kromme als de standaardafwijking kleiner wordt?".

8 Kijk naar de overeenkomsten en gebruik in je antwoord de woorden symmetrie, top, staart.

9 Het staafdiagram kun je gebruiken om te interpreteren of het eerste kwartiel van ELK of van AZM het kleinste is, idem voor het derde kwartiel.

10 Op de horizontale as van het staafdiagram en de boxplot staat de lengte van de rapporten. Wat is de betekenis van de boxplot voor de lengte?

11 Kijk naar de invloed van hele grote getallen rechts op de mediaan en op het gemiddelde.

12 In een boxplot bevinden zich tussen twee verticale streepjes steeds 25% van alle waarnemingen. Het stippellijntje staat voor de mediaan (50% van de waarnemingen bevinden zich links van de mediaan).

13 Bij lopen zijn er 58 waarnemingen, dus de mediaan is het midden van de 29^{e} en 30^{e} waarneming. Ga na in welke klasse deze waarnemingen zich bevinden.

14 Totaal zijn er 91 fietsers, dus de mediaan hoort bij fietser nummer 46.

15 Bij deze opgave gaat men er van uit dat de waarnemingen links in hun klasse liggen, dus aan het begin van elke klasse. Gebruik voor de berekening bijv. bij klasse 0 – 0,5 dus 0.

16 Mediaan, dus 50% van de waarnemingen ligt links van de mediaan. Bereken het gemiddelde met behulp van de gegevens uit het histogram.

17 Bepaal met behulp van het histogram een frequentieverdeling en een cumulatieve frequentieverdeling. Hiermee zijn de kwartielen te bepalen.

18 Teken een symmetrisch histogram, met een ander gemiddelde en een andere standaarddeviatie.

19 Bedenk om welke klassen het gaat.

20 Maak een relatieve frequentietabel met behulp van de figuur. Bijv. klasse A 0-<2 weken heeft een percentage van 8%, klasse B 2-<4 heeft een percentage van 12%. etc.

21 Het derde kwartiel (75%) valt in klasse H. Schrijf eerst alle gegevens van klasse H op.

22 Kijk naar toenemende of afnemende stijging van het percentage wachtenden.

© ThiemeMeulenhoff

23 Is het een willekeurige steekproef die representatief is?

24 Bedenk welke twee lijnen getekend moeten worden om het gebied aan te geven; arceer het gebied waar ze minder dan 2 inch mogen verschillen.

25 Kijk naar het aantal stippen.

26 Totaal staan er 1064 lengtes van zonen op volgorde van grootte. Bedenk welke getallen je voor de boxplot nodig hebt.

27 Bedenk wat de tussentijd na de laatste eruptie kan zijn.

28 Bereken de totale tijd van de erupties en de tussentijden en vergelijk de uitkomst met het aantal minuten in een week.

29 Lineair extrapoleren, maak gebruik van de rechte lijn door (2, 56) en (5, 90) om een schatting te maken.

30 95% betrouwbaarheidsinterval is
[gemiddelde – 2 · standaardafwijking, gemiddelde + 2 · standaardafwijking]

31 Zoek als tegenargument een voorbeeld met behulp van de grafiek.

32 De groep die je gaat onderzoeken.

33 Waar gaat het om als het om proporties gaat?

34 Vul de bekende gegevens in en gebruik de rekenmachine.

35 Welke vergelijking moet worden opgelost?

36 Bekijk of er sprake is van een verband tussen de gegevens op de horizontale as en de verticale as.

37 Bij welke puntenwolk kun je de beste voorspelling doen en waarom?

38 Als de vrouw en man altijd even oud zijn, dan liggen alle punten op de rechte lijn door (20, 20) en (80, 80). Teken deze lijn en bekijk waar de meeste punten liggen ten opzichte van deze lijn.

39 95% van alle waarnemingen ligt in het interval
[gemiddelde – 2 · standaardafwijking, gemiddelde + 2 · standaardafwijking]

40 Bedenk hoe de punten in de rechterbovenhoek worden meegeteld in het percentage.

41 Vergelijk de getallen in het cumulatieve frequentiepolygoon. Ga na in welk restaurant de fooien hoger zijn.

42 Relatief, dus bekijk het percentage fooien tussen de 6 en 8 dollar.

43 Splits de vraag eerst in twee onderdelen: de driekwart hoogste fooien van restaurant B en de 75% laagste fooien van restaurant A.

44 Gebruik het formuleblad.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 7

De melkboer

1 *De vraag gaat over in welke representatie je aantallen af kunt lezen? De eis is een maximum van 80 bacteriën per cl.*
In de tabel en in de figuur met op de horizontale as aantallen bacteriën kun je de aantallen aflezen.
In de boxplot kun je zien wat de grenzen zijn van het eerste kwartiel (25%), mediaan (50%), derde kwartiel (75%), maar niet hoeveel overschrijdingen er zijn van de norm, dus het aantal kun je niet aflezen.
Conclusie: de boxplot is dus niet geschikt voor deze vraag.

2 In de 100 monsters zitten gemiddeld 59 bacteriën per cl. Dit is het gemiddelde van de steekproef.
Dit kan afwijken van de echte dagproductie. Een steekproef geeft een benadering.
Ook van invloed op de dagproductie kan de hoeveelheid melk per boer zijn. Als een boer heel veel melk levert, dan heeft dit invloed op het gemiddelde van de totale dagproductie, deze gegevens zijn ook niet mee genomen in de steekproef.

3 *Bereken eerst de grenzen met behulp van de interkwartielafstand.*
Uit de boxplot is af te lezen:
de mediaan = 60, Q_3 = 70 en Q_1 = 40, dus de interkwartielafstand = 70 – 40 = 30
De grenzen zijn 60 – 1,5 · 30 = 15 en 60 + 1,5 · 30 = 105.
In de tabel is nu te zien dat er twee uitschieters zijn, namelijk 1 met 0 bacteriën en 1 met 10 bacteriën.
Bij 0 bacteriën zou het om een meetfout kunnen gaan, bijvoorbeeld omdat de apparatuur weigert.

4 *Bedenk hoe de nieuwe tabel er uit komt te zien en wat dit doet met het gemiddelde en de standaardafwijking.*
De waarden 0 en 10 bacteriën verdwijnen en worden vervangen door 50 bacteriën.
Het gemiddelde reken je uit door alle waarden bij elkaar op te tellen en te delen door het totale aantal 100.
Alle waarden bij elkaar optellen wordt nu 50 + 40 groter (want 0 wordt 50 en de 10 wordt 50), dus de uitkomst van het gemiddelde wordt ook groter.
0 en 10 verdwijnen en de vervangende getallen komen dichter bij het gemiddelde te liggen, dus de afstand tot het gemiddelde wordt kleiner, dus de standaardafwijking wordt kleiner.

5 *Wat was eerst de mediaan? Hoe komt de nieuwe tabel er uit te zien en wat dit doet met de eerste 50% van de waarnemingen.*
De waarden 0 en 10 verdwijnen en worden vervangen door twee van 50. De twee waarden 0 en 10 waren kleiner dan de mediaan en 50 is ook een waarde kleiner dan de mediaan. De mediaan lag bij 60 en blijft dus bij 60 liggen.

6 *Een vuistregels voor de normale verdeling is: 95% van alle waarnemingen ligt in het interval [gemiddelde – 2 · standaardafwijking, gemiddelde + 2 · standaardafwijking].*
In één steekproef van 100 is het gemiddelde 60 bacteriën per cl en de standaardafwijking 20 bacteriën per cl. Nu worden de gemiddeldes van alle steekproeven als waarnemingen genomen. Het gemiddelde van al die gemiddeldes (het populatiegemiddelde) blijft 60, maar de standaardafwijking wordt kleiner. Hoeveel kleiner de standaarddeviatie wordt, kun je aflezen uit de figuur.
standaarddeviatie = afstand van het midden 60 tot het buigpunt (waar de grafiek van hol naar bol overgaat). Het buigpunt ligt ongeveer bij 62. Dus de standaarddeviatie is 62 – 60 = 2.
Het 95% betrouwbaarheidsinterval is ongeveer [60 – 4, 60 + 4] = [56, 64]. Dus in 95% van de gevallen wordt een steekproefgemiddelde gevonden binnen dit interval.

© ThiemeMeulenhoff

7 *Een vuistregels voor de normale verdeling is: 95% van alle waarnemingen ligt in het interval [gemiddelde – 2·standaardafwijking, gemiddelde + 2·standaardafwijking].*
Neem aan dat voor elke dagproductie geldt dat zowel de uitkomst van het gemiddeld kleiner is als 60 als de standaardafwijking kleiner dan 20. Neem verder aan dat de steekproefomvang gelijk blijft.
De uitkomst van het gemiddeld van de dagproductie is kleiner dan 60.
Dan wordt de som van alle steekproefgemiddeldes kleiner, maar je deelt door hetzelfde aantal. Het gemiddelde van het populatiegemiddelde wordt dus ook kleiner dan 60.
De standaardafwijking wordt kleiner dan 20.
Dan wordt de *S* in de teller van de standaardafwijking van het populatiegemiddelde kleiner, het aantal van de steekproefomvang blijft gelijk, dus de standaardafwijking van het populatiegemiddelde wordt kleiner dan 20. Hoe kleiner de standaardafwijking hoe smaller het 95% betrouwbaarheidsinterval.

Conclusie: het gemiddelde wordt kleiner dan 60, dus het 95% betrouwbaarheidsinterval schuift naar links en de standaardafwijking wordt kleiner dan 20, dus het 95% betrouwbaarheidsinterval wordt smaller.

Teksten vergelijken

8 Beide verdelingen zijn niet symmetrisch, hebben één top aan de linkerkant en een staart naar rechts. Beide verdelingen hebben dezelfde vorm.

9 Bij verdeling van ELK (de donkergrijze staven) is de top hoger en meer naar links dan bij AZM, voorbij de top van ELK zijn de frequenties kleiner dan die van AZM (de staven zijn minder lang). Het eerste kwartiel en het tweede kwartiel van ELK begint eerder dan dat van AZM. Bij ELK liggen de waarnemingen meer naar links dan bij AZM.
Conclusie: boxplot I hoort bij ELK en boxplot II bij AZM.

10 *Bekijk wat de mediaan betekent voor de lengte van de rapporten.*
De mediaan van boxplot II is groter dan de mediaan van boxplot I, in boxplot II zijn er dus meer grotere waarden. Dit betekent dat er meer rapporten zijn met een grotere lengte in het AZM
Conclusie: er is dus verschil in de rapporten.

11 *De grootte van de getallen heeft geen invloed op de mediaan wel op het gemiddelde.*
Hoe groter de meetwaarde hoe groter de invloed op het gemiddelde. Er zijn veel grote meetwaarden aan de rechterkant (de staart naar rechts) die het gemiddelde beïnvloeden. Het gemiddelde zal dus waarschijnlijk groter zijn dan de mediaan.

Verplaatsingen

12 De waarnemingen 'Lopen' liggen tussen de 0 en 7,5 km.
Totaal zijn er 58 waarnemingen gedaan met de verplaatsing lopen.
Van deze 58 verplaatsingen ligt het grootste deel (18 + 16 + 18 = 52) tussen de 0 en 2,5 km,
dit is $\frac{52}{58} \cdot 100\ \% = 90\%$. Oftewel Q_3 is kleiner dan 2,5.
Er liggen maar 6 waarnemingen (10%) tussen de 2,5 en 7,5 km.
De waarnemingen liggen niet symmetrisch, de meeste waarnemingen liggen links.
Boxplot A past dan het beste bij de categorie 'Lopen'.

© ThiemeMeulenhoff

13 Totaal zijn er bij lopen 58 waarnemingen.
De mediaan van lopen is het midden van de 29ᵉ en 30ᵉ waarneming.

afstand in km	lopen	cumulatieve frequentie
0 – 0,5	18	18
0,5 – 1	16	34
1 – 2,5	18	52
2,5 – 3,7	3	55
3,7 – 5	2	57
5 – 7,5	1	58

De 29ᵉ en de 30ᵉ waarneming vallen in de klasse 0,5 – 1 km, dus de mediaan ligt ook in deze klasse.

14 De mediaan hoort bij fietser nummer 46 (er zijn totaal 91 fietsers).

fietser f	afstand a
nr. 20	1 km
nr. 57	2,5 km

eerste manier bekijk wat er per fietser bij komt:
Per fietser komt er $\frac{2,5 - 1}{57 - 20} = \frac{1,5}{37}$ bij vanaf 1 km.
De 46e fietser is de 26ᵉ fietser (46 – 20 = 26) na fietser nr. 20.
De afstand voor de 46ᵉ fietser = $1 + 26 \cdot \frac{1,5}{37} = 2,1$ km.
tweede manier, met een vergelijking van de lijn:
Bereken de vergelijking van de lijn door (20, 1) en (57; 2,5) en vul voor $f = 46$ in.
rc = $\frac{2,5-1}{57-20} = \frac{1,5}{37}$ dus $a = \frac{1,5}{37}f + b$
Bijvoorbeeld (20, 1) invullen geeft $1 = \frac{1,5}{37} \cdot 20 + b$, dus
$1 = \frac{30}{37} + b$, dus $b = \frac{7}{37}$ de vergelijking wordt $a = \frac{1,5}{37}f + \frac{7}{37}$
$f = 46$ invullen geeft $a = \frac{1,5}{37} \cdot 46 + \frac{7}{37} = 2,1$ km

15 *Bij deze opgave gaat men er van uit dat de meeste waarnemingen links in hun klasse liggen, dus aan het begin van elke klasse.*
Voor de berekening van het kleinste gemiddelde neem je niet het klassenmidden, maar de linker klassengrens.

Afstand in km	kleinste waarde x	frequentie f	$x \cdot f$
0 – 0,5	0	1	0 · 1 = 0
0,5 – 1	0,5	4	0,5 · 4 = 2
1 – 2,5	1	19	1 · 19 = 19
2,5 – 3,7	2,5	12	2,5 · 12 = 30
3,7 – 5	3,7	7	3,7 · 7 = 25,9
5 – 7,5	5	14	5 · 14 = 70
7,5 – 10	7,5	6	7,5 · 6 = 45
10 – 15	10	10	10 · 10 = 100
15 – 20	15	6	15 · 6 = 90
20 km of meer	20	18	20 · 18 = 360
totaal		97	741,9

© ThiemeMeulenhoff

Het kleinste gemiddelde = $\frac{741,9}{97} = 7,6$ km.
Of bepaal het gemiddelde door de kolom van de kleinste waarde van x en de kolom van de frequentie in de grafische rekenmachine in te voeren.

Scheve verdelingen

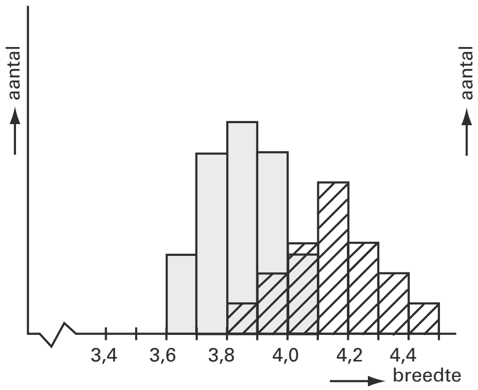
16 *Bereken het gemiddelde.*
Haal uit het histogram de klassenmiddens en de frequentie. Voer deze in de grafische rekenmachine in en bepaal het gemiddelde of bereken het gemiddelde
$= \frac{4,25 \cdot 5 + 4,35 \cdot 20 + 4,45 \cdot 25 + 4,55 \cdot 20 + 4,65 \cdot 10 + 4,75 \cdot 10 + 4,85 \cdot 5 + 4,95 \cdot 5}{5 + 20 + 25 + 20 + 10 + 10 + 5 + 5} = 4,535$
De gemiddelde breedte is dus iets groter dan de mediaan.

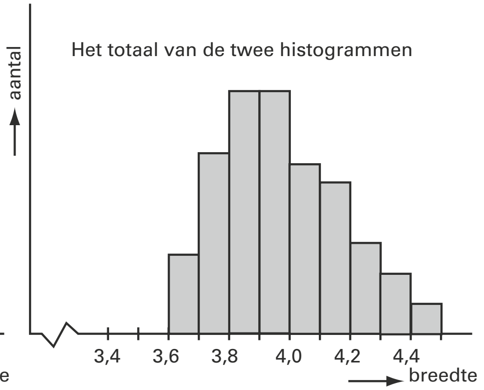
17 De mediaan is 4,5 (gegeven).
Q_1 en Q_3 moeten nog bepaald worden.
Uit het histogram volgt de relatieve frequentie (rel. freq.)

klasse	rel. freq.	cumulatieve rel. freq.
4,2 -< 4,3	5	5
4,3 -< 4,4	20	25
4,4 -< 4,5	25	50
4,5 -< 4,6	20	70
4,6 -< 4,7	10	80
4,7 -< 4,8	10	90
4,8 -< 4,9	5	95
4,9 -< 5,0	5	100

Bij de cumulatieve relatieve frequentie is meteen af te lezen dat
$Q_1 = 4,4$ (bij 25%) en
$Q_3 = 4,65$ (75% ligt precies in het midden van de klasse 4,6 -< 4,7).
Deze gegevens invullen in de formule: $S = \frac{(4,65 - 4,5) - (4,5 - 4,4)}{(4,65 - 4,5) + (4,5 - 4,4)} = \frac{0,05}{0,25} = 0,2$.

18 *Het te tekenen histogram moet symmetrisch zijn, maar met een ander gemiddelde dan 3,85 en een andere standaardafwijking dan van het histogram op de bijlage.*
Het grijze histogram is gegeven, het gestreepte histogram is er extra bij getekend.





© ThiemeMeulenhoff

Wachtlijsten

19 *Kijk in de figuur (zie opgave) bij wachttijd neurochirurgie.*
De mensen in de klassen C, D en E wachten tussen de 4 en 10 weken.
Ongeveer 38% wordt binnen vier weken geholpen (klassen A en B) en ongeveer 58% wordt binnen tien weken geholpen (klassen A, B, C, D en E).
Conclusie: 20% wordt tussen de vier en tien weken geholpen (klassen C, D en E).

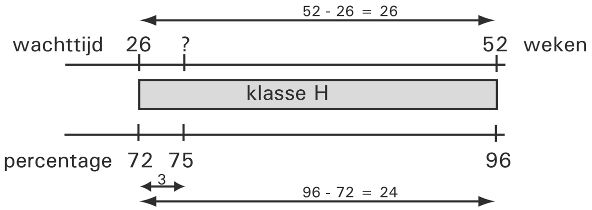
20 *Uit de figuur (zie opgave) het klassenmidden en percentages per klasse aflezen.*
Klasse B heeft bijvoorbeeld een wachttijd van 2 - < 4 weken en
het percentage met deze wachttijd is 20 – 8 = 12%.

wachttijd in weken	klassenmidden	percentage
0 - < 2	1	8
2 - < 4	3	12
4 - < 6	5	16
6 - < 8	7	24
8 - < 10	9	16
10 - < 12	11	10
12 - < 26	19	6
26 - < 52	39	4
52 - < 104	78	4

gemiddelde wachttijd $= \frac{1 \cdot 8 + 3 \cdot 12 + 5 \cdot 16 + 7 \cdot 24 + 9 \cdot 16 + 11 \cdot 10 + 19 \cdot 6 + 39 \cdot 4 + 78 \cdot 4}{100} = 11{,}28$

Conclusie: de gemiddelde wachttijd is ongeveer 11 weken.

21 Het derde kwartiel (75%) valt in klasse H (zie figuur).
Klasse H heeft een wachttijd van 26 - < 52 weken.
72% heeft een wachttijd van maximaal 26 weken
en 96% heeft een wachttijd van maximaal 52 weken
(opmeten in figuur 9).



eerste manier kijk naar de breedte van blok H:
De totale ‘breedte’ van blok H is 96 – 72 = 24%.

Het derde kwartiel ligt bij 75%, dus op $\left(\frac{75-72}{96-72}\right)^e$ deel van blok H.

derde kwartiel $= 26 + \frac{75-72}{96-72} \cdot (52-26) = 26 + \frac{3}{24} \cdot 26 = 29{,}25$

Conclusie: het derde kwartiel is ongeveer 29 weken.

tweede manier, bepaal een vergelijking van de lijn door (72, 26) en (96, 52) en bereken de y-waarde voor x = 75:

$y = ax + b$ en r.c. $= a = \frac{52-26}{96-72} = \frac{26}{24} = 1\frac{1}{12}$ dus $y = 1\frac{1}{12}x + b$.

Bijvoorbeeld (72, 26) invullen: $26 = 1\frac{1}{12} \times 72 + b$, dus $b = 26 - 78 = -52$

$y = 1\frac{1}{12}x - 52$, dus $y = 1\frac{1}{12} \times 75 + 52 = 29{,}25$

Conclusie: het derde kwartiel is ongeveer 29 weken.

© ThiemeMeulenhoff

22 *Lees de wachttijd neurochirurgie af in figuur 8.*

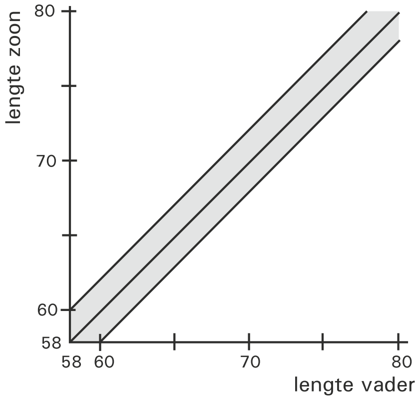
wachttijd in weken	cumulatief percentage	percentage
0 - < 2	22	22
2 - < 4	39	17
4 - < 6	48	9
6 - < 8	54	6
8 - < 10	59	5
10 - < 12	61	2

Het percentage wachtenden per klasse neemt af vanaf klasse A t/m klasse F.
Voor de eerste twaalf weken (t/m klasse F) moet het cumulatieve frequentie-polygoon afnemend stijgend zijn.
Conclusie: figuur IV past het beste.

Vaders en zonen

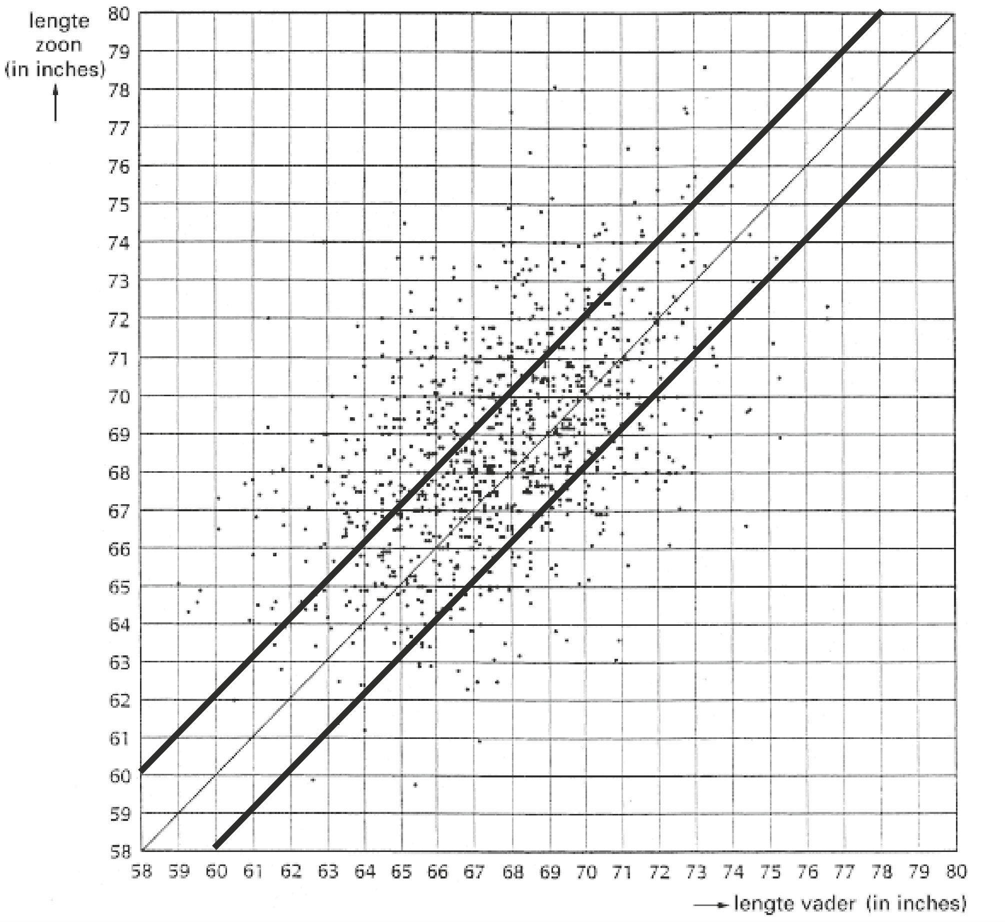
23 Deze steekproef gaat alleen over zonen die studeerden aan een Londense universiteit. Een aselecte steekproef van vaders en zonen moet komen uit de gehele bevolking van Engeland.
Conclusie: er is geen sprake van een aselecte steekproef.

24 Als de zoon 2 inch langer is dan de vader dan gaat de lijn door bijvoorbeeld (58, 60) en (78, 80).
Als de zoon 2 inch korter is dan de vader dan gaat de lijn door bijvoorbeeld (60, 58) en (80, 78). Het gebied tussen deze twee lijnen geeft het gebied waar de vaders en zonen ongeveer even lang zijn.

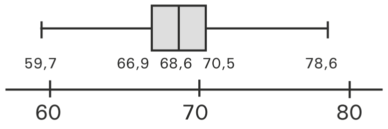


© ThiemeMeulenhoff

25 Teken de lijnen van de vorige opgave in de figuur bij de opgave.
Er is duidelijk te zien dat er meer stippen boven het gebied liggen dan onder het gebied. Dus er zijn meer zonen langer dan hun vader dan korter. Dit heeft invloed op het gemiddelde. In het grijze gebied, tussen de twee dikkere lijnen, lijken de punten ongeveer gelijk verdeeld te zijn. Totaal liggen er duidelijk meer punten boven de lijn door (58,58) en (80, 80) dan er onder.
Conclusie: zonen zijn gemiddeld langer.



26 Totaal staan er 1064 lengtes van zonen in de tabel op volgorde van grootte.
Uit deze tabel kun je aflezen:
kleinste waarneming = 59,7 (eerste getal)
Q_1 = 66,9 (het midden van het 266e en 267e getal)
mediaan = 68,6 (het midden van het 532e en 533e getal)
Q_3 = 70,5 (het midden van het 798e en 799e getal)
grootste waarneming = 78,6 (laatste getal)



Erupties

27 In de figuur staat op de horizontale as de eruptieduur en op de verticale as de tussentijd tot de eerstvolgende eruptie. Bij de laatste eruptie is de tussentijd tot de volgende eruptie (tijd tot de nieuwe uitbarsting) nog niet bekend. Dit punt kan dus niet worden weergegeven in de grafiek.

28 We rekenen met 183 erupties die gemiddeld 3,5 minuut per stuk duurden.
Totaal duurden deze 183 erupties ongeveer 183 · 3,5 = 640,5 minuten.
Er zijn 183 tussentijden die gemiddeld 73 minuten duurden. Totaal duurden deze 183 tussentijden ongeveer 183 · 73 = 13 359 minuten.
De totale eruptie duurde 640,5 + 13 359 minuten = 13 999,5 minuten
1 week = 7 dagen x 24 uur x 60 minuten = 10 080 minuten.
Conclusie: de actieve periode duurde langer dan een week.

29 De lijn gaat door (2, 56) en (5, 90).
eerste manier met toename:
Als E met 3 toeneemt, dan neemt T met 90 – 56 = 34 toe
Als E met 1 toeneemt, dan neemt T met ongeveer 34 : 3 = 11,3 toe
Dus als E toeneemt van 5 naar 6, dan wordt T 90 + 11,3 = 101,3
Conclusie: de geschatte tussenduur is ongeveer 101 minuten.

tweede manier met een vergelijking voor de rechte lijn:
Rechte lijn dus de formule wordt: $T = a \cdot E + b$
richtingscoëfficiënt = $a = \frac{90-56}{5-2} = \frac{34}{3} \approx 11{,}3$ dus $T = 11{,}3E + b$
Bijvoorbeeld punt (2, 56) invullen geeft $56 = 11{,}3 \cdot 2 + b$ dus $b = 56 - 22{,}6 = 33{,}4$
De vergelijking voor de lijn wordt: $T = 11{,}3E + 33{,}4E = 6$ dus $T = 11{,}3 \cdot 6 + 33{,}4 = 101{,}2$
Conclusie: de geschatte tussenduur is ongeveer 101 minuten.

30 *Een vuistregels voor de normale verdeling is: 95% van alle waarnemingen ligt in het interval [gemiddelde – 2 · standaardafwijking, gemiddelde + 2 · standaardafwijking]*
Uit de grafiek van de rechte lijn lees je af dat bij een eruptieduur van E = 4,5 minuut, T ongeveer 84 is.
De standaardafwijking is 4, dus het 95% betrouwbaarheidsinterval is ongeveer [84 – 8, 84 + 8] = [76, 92].
Conclusie: in 95% van de gevallen ligt de tussentijd tussen de 76 en 92 minuten.
T kan ook berekend worden met de formule uit de vorige opgave:
$T = 11{,}3 \cdot 4{,}5 + 33{,}4 = 84{,}25$.

31 *Zoek een tegenvoorbeeld.*
In de grafiek is af te lezen dat bij een eruptieduur E = 5,6 minuut, T = 90 minuten.
Bij een eruptieduur van E = 4 minuten is T = 110 minuten.
Conclusie: in dit voorbeeld wordt de eruptieduur niet groter als de tussentijd groter wordt.

Wasdrogers

32 Populatie is de groep die je gaat onderzoeken, de groep voor de steekproef voor een enquête of onderzoek, dus dit zijn de huishoudens in Nederland.

33 Gevraagd wordt naar het percentage, dus het gaat om proporties.

34 Ga uit van 40% heeft een wasdroger, dus $p = 0{,}40$.

$$S = \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot (1-0{,}4)}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n}} = \frac{\sqrt{0{,}24}}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}49}{\sqrt{n}}$$

35 S mag hoogstens 0,015 zijn. Dus los op $\frac{0{,}49}{\sqrt{n}} = 0{,}015$. Dat geeft $0{,}49 = 0{,}015 \cdot \sqrt{n}$ dus $32{,}6667 = \sqrt{n}$ dus $n = 1067{,}11$.
De steekproef is altijd een geheel getal en in dit geval moet je naar boven afronden.
Conclusie: de steekproef omvat minstens 1068 huishoudens

Huwelijken

36 *Is er sprake van een verband tussen de gegevens op de horizontale en de verticale as?*
In de linker figuur komen allerlei combinaties voor er lijkt niet een duidelijk verband tussen de waarden op de horizontale as en de verticale as. Bij de rechterfiguur is dit wel zo, hoe groter de waarde op de horizontale as hoe groter de waarde op de verticale as, hier is dus een duidelijker verband.
Bij huwelijken is het waarschijnlijker dat beide partners ongeveer dezelfde leeftijd hebben dan dezelfde lengte.
Conclusie: de puntenwolk rechts zal dus betrekking hebben op de leeftijd.

37 Bij puntenwolken met een duidelijk verband, zijn schattingen betrouwbaarder.
Dus hoe meer de puntenwolk lijkt op een rechte lijn, hoe betrouwbaarder de schatting. Hoe kleiner de spreiding, hoe beter de schatting mogelijk is.
Conclusie: een schatting van de leeftijden (de rechter figuur) is het meest betrouwbaar.

38 Als de leeftijden even groot zouden zijn, dan liggen alle punten op de lijn door (20, 20) en (60, 60).
Teken deze lijn in figuur 12 bij de opgave.
Er liggen meer punten onder dan boven de lijn, dus het komt vaker voor dat de man ouder is dan de vrouw.

39 *Een vuistregels voor de normale verdeling is: 95% van alle waarnemingen ligt in het interval [gemiddelde – 2 · standaarddeviatie, gemiddelde + 2 · standaarddeviatie].*
Lees de gegevens af in de tabel.
De verticale lijnen gaan over de lengte van de man.
Het gemiddelde = 173 cm en de standaardafwijking = 6,9 cm.
De linker lijn is: lengte man = 173 – 2 · 6,9 = 159,2 cm.
De rechter lijn is: lengte man = 173 + 2 · 6,9 = 186,8 cm.
De horizontale lijnen gaan over de lengte van de vrouw.
Het gemiddelde = 160 cm en de standaardafwijking = 6,2 cm.
De onderste lijn is: lengte vrouw = 160 – 2 · 6,2 = 147,6 cm.
De bovenste lijn is: lengte vrouw = 160 + 2 · 6,2 = 172,4 cm.

40 *5% van alle mannen en 5% van alle vrouwen valt buiten het gebied. Kan men nu concluderen dat 10% van het totaal buiten het gebied valt?*
Neem het punt rechtsboven in de figuur. Dit punt hoort bij een echtpaar. Bij dit punt hoort een lengte van de vrouw buiten het gebied van de vrouwen, maar ook een lengte van de man buiten het gebied van de mannen. Dit punt wordt dus twee keer meegeteld, zowel bij de 5% van de mannen als bij de 5% van de vrouwen. Maar voor het totale aantal punten buiten het gebied mag dit punt maar 1 keer meegeteld worden. Je mag de procenten dus niet optellen. De onderzoeker heeft dus ongelijk met zijn bewering.
Conclusie: het percentage van het voorbeeld zal kleiner zijn dan 10%, want er staan punten in die dubbel tellen.

© ThiemeMeulenhoff

Fooien

41 *Vergelijk de cumulatieve frequentiepolygonen: in welk restaurant zijn de fooien hoger?*
Het cumulatieve frequentiepolygoon van B ligt rechts van dat van A. De fooien in restaurant B zijn dus hoger dan in restaurant A.
Conclusie: in restaurant B werd er in totaal meer fooi gegeven.

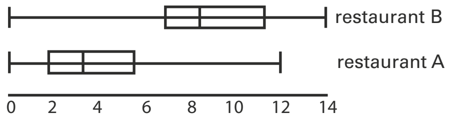
42 *eerste manier, lees bij beide restaurants af hoeveel procent van de fooien er t/m 8 dollar wordt gegeven en hoeveel t/m 6 dollar:*
In restaurant A ligt 90 – 80 = 10% van de fooien tussen de 6 en 8 dollar.
In restaurant B ligt 35 – 20 = 15% van de fooien tussen de 6 en 8 dollar.
Conclusie: in restaurant B

tweede manier, kijk naar de steilheid van het polygoon, hoe steiler hoe groter het percentage:
Bij restaurant A is het polygoon tussen de 6 en 8 dollar minder steil dan bij restaurant B.
Conclusie: in restaurant B.

43 *Zoek de grens van driekwart hoogste fooien van restaurant B en de 75% laagste fooien van restaurant A.*
De driekwart hoogste fooien bij restaurant B, dus kijk bij 25% (het eerste kwartiel), 25% ligt bij een fooibedrag van ongeveer € 6,70.
De 75% laagste fooien van restaurant A, dus kijk bij 75% (het derde kwartiel), 75% ligt bij een fooibedrag van ongeveer € 5,50.
Conclusie: € 5,50 is kleiner dan € 6,70 dus ruim driekwart van de fooien in restaurant B is hoger dan de 75% laagste fooien in restaurant A.

44 *Gebruik het formuleblad om twee groepen te vergelijken, doe dit op twee manieren.*
eerste manier, met boxplot overlapping:
Met behulp van het cumulatieve frequentiepolygoon zijn voor restaurant A en B de boxplots te maken.

	Restaurant A	*Restaurant B*
kleinste waarde	0	0
eerste kwartiel (25%)	1,8	6,7
mediaan (50%)	3,2	8,3
derde kwartiel (75%)	5,5	11,2
grootste waarde	12	14



De boxen overlappen niet, dus het verschil is groot.

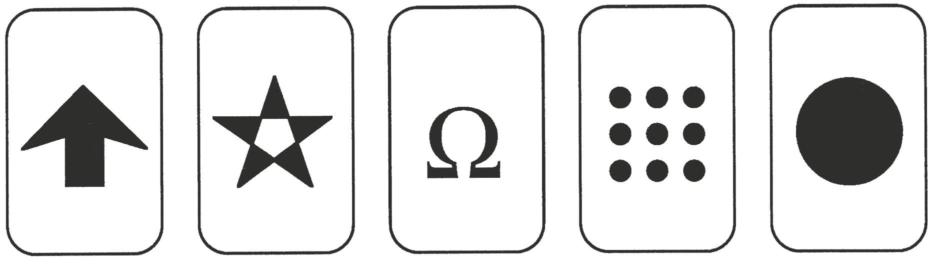
tweede manier, met maximaal verschil in cumulatief percentage:
Zie grafiek voor max V_{cp} (mag gebruikt worden want $n = 500$ is groter dan 100)
De verticale afstand is het grootst bij een fooibedrag van € 6, deze afstand is 80% – 20% = 60%
Dus het maximale verschil in cumulatief percentage (max V_{cp}) is 60.
60 > 40, dus het verschil is groot.

© ThiemeMeulenhoff

8 Telproblemen *

Aantal mogelijke volgordes

Bij een helderziendheidstest wordt een stapel van 25 kaarten gebruikt, waarin elk van onderstaande kaarten 5 keer voorkomt.



De kaarten worden goed geschud en vervolgens worden er drie kaarten tegelijk uit de stapel getrokken.

1 Op hoeveel manieren kun je twee sterren en een cirkel trekken?

2 Hoeveel combinaties zijn er om geen ster en geen cirkel te trekken?

3 Geef in onderstaand schema alle mogelijke uitkomsten schematisch weer om drie verschillende kaarten te trekken. De mogelijkheid pijl, ster, omegateken is op de eerste regel al weergegeven.

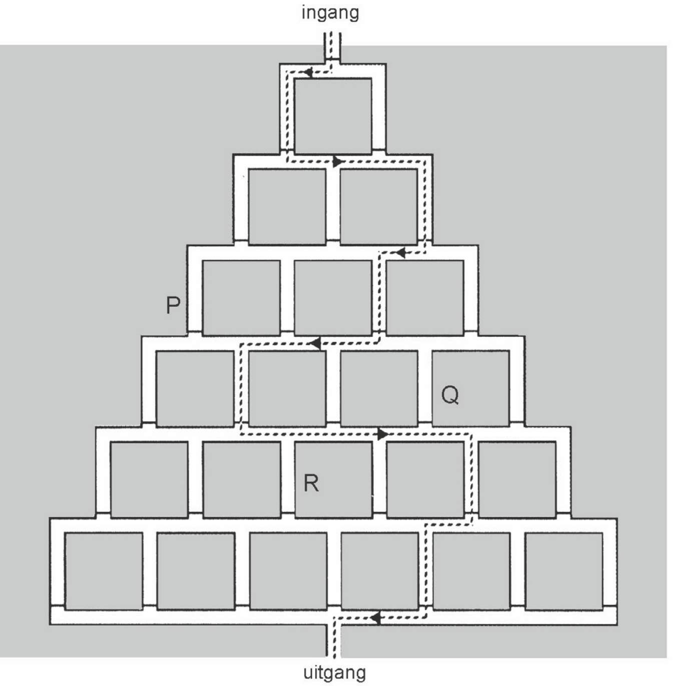
pijl	ster	omegateken	9 stippen	cirkel
x	x	x		

* Deze stof wordt niet in het centraal examen gevraagd.

© ThiemeMeulenhoff

Intelligentie van ratten

Bij onderzoek naar intelligentie van ratten wordt soms gebruikgemaakt van een gangenstelsel, een zogenaamd T-labyrint.
Hieronder zie je een plattegrond van zo'n T-labyrint.

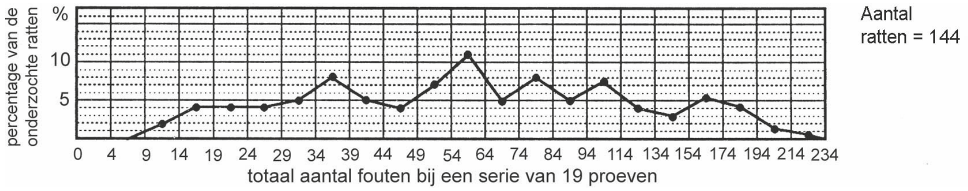


In elk van de verticaal getekende gangen zit een klapdeurtje, dat slechts in één richting kan worden gepasseerd. Dat verhindert dat een rat terug naar 'boven' kan lopen.
Een rat kan langs een groot aantal 'routes' van ingang naar uitgang lopen. Op de plattegrond is een voorbeeld van een route getekend. Twee routes van ingang naar uitgang worden als gelijk beschouwd als dezelfde serie klapdeurtjes wordt gepasseerd.

4 Hoeveel verschillende routes zijn er van ingang naar uitgang?

Bij P, Q en R worden de deurtjes vergrendeld waardoor drie doodlopende gangen ontstaan. Loopt de rat een doodlopende gang in, dan wordt dat als een fout geregistreerd.
Neem aan dat de rat op willekeurige wijze zijn weg door het T-labyrint kiest en nooit tweemaal dezelfde doodlopende gang ingaat.

5 Toon aan dat de helft van alle routes zonder fouten is.



© ThiemeMeulenhoff

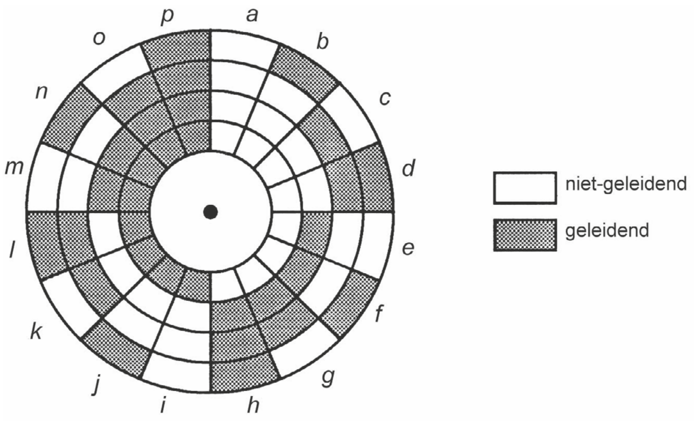
Na de eerste serie proeven werden de 25% slimste ratten en de 25% domste ratten geselecteerd.

6 Ga met behulp van bovenstaande grafiek na of een rat die in totaal 40 fouten maakte, tot de ‘slimmen’ werd gerekend.

Codes op een schijf

Een machineonderdeel is voorzien van een schijf met een aantal ringvormige sporen. Elk spoor is verdeeld in vakjes. De helft van de vakjes is voorzien van elektrisch geleidend materiaal. In figuur 1 zie je een voorbeeld van zo’n schijf met 4 ringen en 16 vakjes per ring.

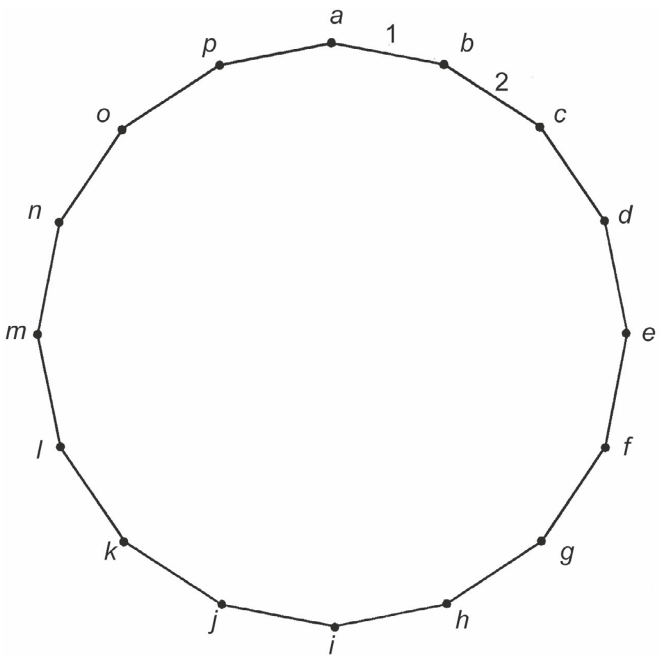
figuur 1



De schijf bevat 16 sectoren. In de figuur zijn de sectoren aangegeven met letters. Elke sector bestaat uit 4 vakjes. Als de lichte vakjes met het cijfer 0 en de donkere vakjes met het cijfer 1 worden aangegeven, komt elke sector overeen met een rijtje van 4 cijfers.
Bijvoorbeeld: *a* = 0000, *b* = 0001, *c* = 0010, enz. De volgorde van de cijfers is dus van binnen naar buiten.
Elk tweetal sectoren verschilt op tenminste één plaats.
Het aantal verschillen noemt men de afstand tussen die sectoren.
In figuur 2 zie je een graaf van de sectoren *a*, *b*, …, *p*. Alleen tussen ‘buursectoren’ zijn lijnen getrokken. De afstanden tussen de buursectoren *a* en *b*, en tussen *b* en *c* zijn aangegeven in de figuur.

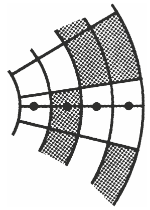
7 Geef de afstanden van de andere paren buursectoren aan in de graaf in figuur 2.

figuur 2

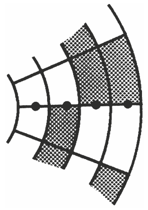


De schijf draait en wordt afgetast door een zogenaamde sensor. Door middel van elektrische stroompjes kan bij elke stand van de schijf het codewoord (bestaande uit nullen en enen) van de onderliggende sector worden afgelezen.
Bij het aflezen kunnen fouten worden gemaakt wanneer de sensor precies boven de grens tussen twee buursectoren staat. In figuur b zie je daarvan een voorbeeld.

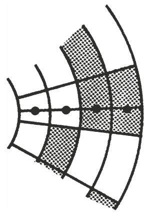
figuur a



figuur b



figuur c



Neem aan dat (in een stand zoals in figuur b) bij elke scheiding tussen twee buurvakjes naar willekeur één van de twee vakjes wordt afgelezen.

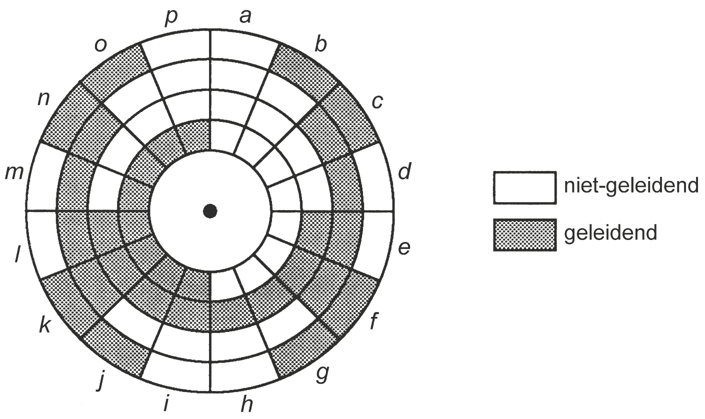
8 Hoeveel verschillende codewoorden kunnen er in de stand van figuur b door de sensor worden afgelezen?

Bij de schijf van figuur 1 zijn er standen van de sensor op de grens van twee buursectoren, waarbij in principe alle zestien mogelijke codewoorden kunnen worden afgelezen.

9 Aan welke voorwaarden moeten die buursectoren dan voldoen en bij welke standen van de sensor is dat zo?

In figuur 3 zie je een andere verdeling van de geleidende vakjes over de schijf.

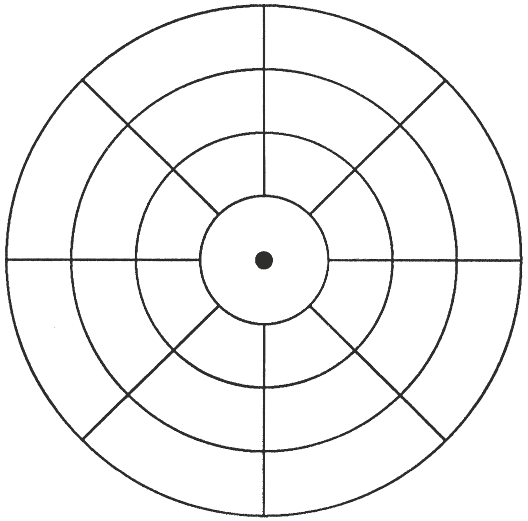
figuur 3



10 Leg uit waarom bij de schijf van figuur 3 het aantal mogelijke foute aflezingen tot een minimum is beperkt.

11 Ontwerp zelf zo'n schijf met 3 ringen en 8 vakjes per ring waarbij alle sectoren verschillend zijn en het aantal mogelijke afleesfouten tot een minimum beperkt is. Teken je ontwerp in figuur 4.

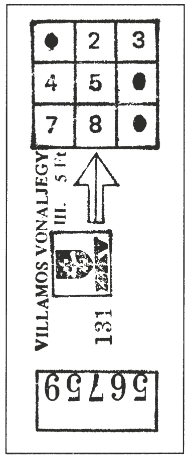
figuur 4



© ThiemeMeulenhoff

Metrokaartjes

Als je in Budapest met de metro wilt reizen, moet je eerst een kaartje kopen. Zo'n kaartje is voorzien van 9 vakjes met daarin de cijfers 1 tot en met 9 (zie de figuur hieronder). Zodra je bent ingestapt, moet je je kaartje in een ponsapparaatje steken (volgens de pijlrichting en met de bedrukte zijde boven). Eén of meer (maximaal 9) cijfers worden dan in één keer weggeponst.
Daarmee is aan het kaartje te zien in welke trein je reis is begonnen.
Hieronder zie je een afbeelding van een gebruikt kaartje, waarbij de vakjes 1, 6 en 9 zijn voorzien van een gaatje.



12 Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er om willekeurig 3 cijfers weg te ponsen?

13 In een kaartje worden 2 gaatjes geponst, die niet in dezelfde rij of kolom zitten. Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er? Licht je antwoord toe.

Het aantal cijfers dat mag worden weg geponst is 1 tot en met 9. Op een dag rijden er 400 treinen.

14 Is het mogelijk dat in elke trein op een verschillende wijze gaatjes in een kaartje worden geponst? Licht je antwoord toe.

© ThiemeMeulenhoff

Combinaties

Een planoloog wil graag weten op grond van welke eigenschappen de bewoners de straten van hun wijk beoordelen. Als onderdeel van zijn onderzoek legt hij een aantal proefpersonen groepjes van drie straten voor. Hij vraagt hen bij elk groepje aan te wijzen welke twee van de drie straten het meest op elkaar lijken.
Het onderzoek heeft betrekking op 10 straten, voor het gemak A, B, C, D, E, F, G, H, K, L genoemd. Hieruit worden alle mogelijke groepjes van drie gevormd en elk groepje wordt in alfabetische volgorde op een kaartje geschreven. Hieronder zie je drie voorbeelden.

D F G	D H K	A C D

15 Hoeveel kaartjes zijn er nodig?

16 Op hoeveel kaartjes komt straat A voor?

17 Op hoeveel kaartjes komen de straten A en B voor?

Een proefpersoon is bereid om bij alle kaartjes zijn keuze te maken.
18 Onderzoek of het mogelijk is dat hij 7 keer voor de combinatie AB, 7 keer voor de combinatie AC en 7 keer voor de combinatie AD kiest.

Tai Sai

Tai Sai is een dobbelspel dat veel in casino's wordt gespeeld. Het spel komt oorspronkelijk uit China. Tai Sai betekent zoiets als 'Groot Klein'. Het wordt gespeeld met drie verschillend gekleurde dobbelstenen die op een speeltafel worden gegooid. Vervolgens wordt de som van de ogen van de dobbelstenen bepaald.

19 Bereken hoeveel verschillende mogelijkheden er zijn waarbij de som van de ogen 6 is.

 © ThiemeMeulenhoff

Kunstrijden op de schaats

Kunstrijden op de schaats werd als olympische sport voor het eerst beoefend in 1908. Veel deelnemers waren er niet: bij de mannen streden slechts zeven kunstschaatsers om de eer. Het waren Johansson, Salchow en Thorén uit Zweden, Greig en March uit Groot-Brittannië, Brokaw uit de Verenigde Staten en Torromé uit Argentinië.
Ook de beoordeling was nog niet geprofessionaliseerd. Er waren slechts vijf juryleden met een overzichtelijke taak. Ze moesten, nadat alle deelnemers hun kwaliteiten hadden laten zien, ieder voor zich een ranglijst opstellen: welke kunstschaatser is volgens hen nummer één, wie komt op de tweede plaats, enzovoort.

Ulrich Salchow

Een jurylid vond dat de drie Zweedse kunstrijders het best gepresteerd hadden. Hij plaatste deze schaatsers in zijn top 3, de overige kwamen dus op de plaatsen 4 tot en met 7.
20 Bereken op hoeveel manieren dit jurylid op deze manier zijn volledige ranglijst had kunnen invullen.

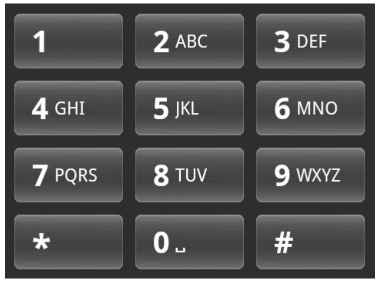
Om de mate van overeenstemming bij de juryleden te onderzoeken, worden de ranglijsten van elk tweetal juryleden met elkaar vergeleken.
21 Bereken hoeveel keer men zo twee ranglijsten met elkaar moet vergelijken.

FF snel sms'en

Hij is tegenwoordig niet meer weg te denken: de mobiele telefoon. Eind 2001 waren er in Nederland ongeveer 12 miljoen mobiele telefoons. Eind 2009 waren het er al 20 miljoen.

Je zou misschien denken dat er eind 2009 ook 20 miljoen mobiele telefoonnummers bestonden, maar er waren toen veel meer mobiele telefoonnummers dan mobiele telefoons.
In Nederland beginnen mobiele telefoonnummers met 06, gevolgd door een van de cijfers 1, 2, 3, 4, 5 of 8. Voor de overige cijfers worden alle cijfers van 0 tot en met 9 gebruikt. Het telefoonnummer bestaat in totaal uit tien cijfers.
Eind 2009 was al 82,2% van de beschikbare mobiele telefoonnummers uitgegeven.
22 Bereken hoeveel mobiele telefoonnummers er in Nederland eind 2009 al waren uitgegeven.

© ThiemeMeulenhoff



De mobiele telefoon wordt vaak gebruikt om een tekstbericht te schrijven. Lange tijd hadden mobiele telefoons een toetsenbord zoals in de figuur. Het intypen van teksten met zo'n toetsenbord werkt vaak met het **T9**-systeem. T9 is een afkorting van 'Tekst op 9 toetsen'[1].
Dit systeem werkt als volgt: wanneer je een letter wilt typen, dan druk je eenmaal op de toets waar die letter op staat. Wil je bijvoorbeeld het woord 'hoi' typen, dan gebruik je de drie toetsen 4 (G**H**I) 6 (MN**O**) 4 (GH**I**).
Het T9-systeem zoekt in de ingebouwde woordenlijst naar het woord dat je zou kunnen bedoelen.

Er wordt met het T9-systeem ingetypt: 945. Dit kan bij elk van de woorden 'wik', 'wil', 'wij' of 'zij' horen. Als de mobiele telefoon geen woordenlijst zou bevatten, zou ook een niet-bestaand woord als 'ygk' of 'xik' bedoeld kunnen zijn.

23 Bereken hoeveel woorden, bestaande en niet-bestaande samen, bij 945 horen.

Wat zeg je?

Een veelgehoorde klacht is: "Ik hoor je wel, maar ik versta je niet." Je hoort nog wel dát er iets gezegd wordt, maar je hersenen moeten hard werken om te verstaan wát er precies gezegd wordt. Dit wordt een **versta-probleem** genoemd.
Niet alleen ouderen, ook heel wat jongeren hebben versta-problemen.
Sinds een paar jaar is er een test waarmee je kunt bepalen of je versta-problemen hebt. Bij deze test krijg je 10 woorden te horen met achtergrondlawaai. Je moet op het antwoordformulier aangeven welk woord je gehoord hebt. Per woord zijn er vier keuzemogelijkheden.

24 Bereken op hoeveel verschillende manieren je het antwoordformulier kunt invullen.

Hog

Hog is een dobbelspelletje dat wordt gespeeld door twee spelers die om de beurt één keer gooien met zoveel dobbelstenen als ze maar willen. Dat aantal dobbelstenen mag elke beurt wisselen.
Eerst wordt er geloot wie er mag beginnen. De speler die aan de beurt is, gooit met de dobbelstenen. De score van deze beurt wordt berekend door de som van de ogen te bepalen. Maar pas op: als er met één of meer van de dobbelstenen een 1 is gegooid, dan is de score 0 punten. De speler telt het behaalde aantal punten op bij de score van zijn vorige beurten.
Wie het eerst 100 punten (of meer) heeft, heeft gewonnen.
Hieronder zie je wat één van de spelers in zijn eerste drie beurten heeft gegooid met het daarbij behorende puntenverloop.

© ThiemeMeulenhoff

beurt 1

score 13 punten

beurt 2

score 0 punten
totaal 13+0 = 13 punten

beurt 3

score 19 punten
totaal 13+19 = 32 punten

Het gooien van tweemaal een 3, eenmaal een 2 en eenmaal een 5 met vier verschillend gekleurde dobbelstenen, zoals in beurt 1, kan op verschillende manieren gebeuren: je kunt bijvoorbeeld met de rode dobbelsteen een 2 gooien, maar ook met de witte dobbelsteen.

25 Bereken het aantal manieren waarop je met vier verschillend gekleurde dobbelstenen tweemaal een 3, eenmaal een 2 en eenmaal een 5 kunt gooien.

Pig

Pig is een dobbelspelletje dat wordt gespeeld door twee spelers die om de beurt een aantal keer met een dobbelsteen werpen. Tijdens een beurt gelden de onderstaande spelregels. Zie tabel 1.

tabel 1

Je gooit een	Actie
1	Je beurtscore is 0. Scores uit mogelijk eerdere worpen uit deze beurt vervallen dus. Je totaalscore verandert niet. De beurt gaat naar de tegenstander.
2, 3, 4, 5 of 6	De score van deze worp wordt bij die van de mogelijk eerdere worpen uit deze beurt opgeteld tot een (voorlopige) beurtscore. Je mag nu kiezen: stoppen → een nieuwe totaalscore (de beurtscore wordt opgeteld bij de oude totaalscore); beurt gaat naar de tegenstander. doorgaan → nogmaals werpen.

Het doel is als eerste op een totaalscore van 100 punten (of meer) uit te komen.
Een mogelijk spelverloop is het volgende.
Speler 1 begint en werpt het rijtje 5-2-2-4 en stopt dan. Hij eindigt deze beurt met een beurtscore van 13 punten. Speler 2 gaat verder. Deze werpt het rijtje 5-4-3-2-6 en stopt dan met een beurtscore van 20 punten. Speler 1 gaat weer verder en werpt het rijtje 3-4-1. Hij heeft dan een beurtscore van 0 punten. Zijn totaalscore blijft 13 punten.
De beurt gaat weer naar speler 2 die het rijtje 6-6 werpt en dan stopt, zodat zijn totaalscore 32 wordt. Het spelverloop is hieronder in tabel 2 weergegeven.

© ThiemeMeulenhoff

tabel 2

	Speler 1							Speler 2							
	score					beurt score	totaal score	score						beurt score	totaal score
beurt 1	5	2	2	4	stop	13	13	5	4	3	2	6	stop	20	20
beurt 2	3	4	1			0	13	6	6		stop			12	32
beurt 3	…							…							

Speler 1 werpt in zijn eerste beurt vier keer met een dobbelsteen met als resultaat het rijtje 5-2-2-4.

26 Bereken hoeveel verschillende rijtjes er mogelijk zijn als er vier keer geworpen wordt in één beurt van dit spel.

Een speler stopt met zijn beurt als hij na drie worpen 16 of meer punten heeft.

27 Schrijf alle rijtjes op waarmee je in drie worpen 16 of meer punten kunt hebben.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 8

1 Er is sprake van een combinatie. Je trekt zonder terugleggen en de volgorde van trekking doet er niet toe.

2 Trek drie kaarten en in ieder geval geen ster en geen cirkel, dus drie kaarten uit de overgebleven 15 kaarten.

3 Begin eerst met het noteren van alle mogelijkheden met een pijl.

4 Bedenk het aantal mogelijke keuzes per keer.

5 Een route zonder fouten, dus bekijk het aantal keuzes zonder gesloten deur.

6 Bepaal eerst hoeveel % van de ratten hoogstens 39 fouten maakt.

7 Voor de afstanden tel je het aantal verschillende hokjes naast elkaar.

8 Stand b van binnen naar buiten: eerste getal van de code is 0, tweede is 0 of 1, derde is 0 of 1, vierde is 0 of 1. Totaal zijn er dus .... mogelijkheden.

9 Er zijn 16 mogelijke codewoorden als de sensor op de grens van twee buursectoren komt met een afstand 4. Ga na waarom dit het geval is. Waar is dat het geval?

10 Bekijk de afstand tussen twee buursectoren en bepaal het maximaal aantal codes als de sensor op de grens komt.

11 Alle sectoren moeten verschillend zijn, de afstand tussen de sectoren zo klein mogelijk. Bedenk welke codes (welke sectoren) je gaat tekenen.

12 Er worden 3 getallen uit 9 cijfers gekozen, de volgorde is niet van belang. Er is sprake van een combinatie.

13 Hoeveel mogelijkheden zijn er voor het eerste en daarna voor het tweede gaatje?

14 Bereken op hoeveel manieren je één gaatje weg kan ponsen, op hoeveel manieren twee etc.

15 Denk aan combinaties.

16 Bedenk dat A er al op staat. Je kiest er nu nog … uit …

17 Bedenk dat A en B er al op staan. Je kiest er nu nog … uit …

18 7 keer AB, 7 keer AC en 7 keer AD moeten dan ook zo vaak los van elkaar voorkomen. Ga dat na door de mogelijkheden systematisch uit te schrijven.

19 Noteer alle mogelijkheden zoals 1-1-4 en op hoeveel manieren je elke mogelijkheid kan rangschikken.

20 Voor de eerste drie plaatsen zijn er drie mogelijkheden en voor de vierde tot en met de zevende plaats zijn dit er 4. Bedenk op hoeveel manieren je dit kunt rangschikken.

21 Denk aan combinaties.

22 Ga na aan welke drie voorwaarden een mobiel telefoonnummer moet voldoen.

23 Bekijk eerst het aantal mogelijkheden per toets.

24 Er zijn 10 woorden en per woord zijn er 4 mogelijkheden.

25 Het gaat om het aantal rijtjes met daarin 3-3-2-5.

26 De eerste drie worpen mag er geen één gegooid worden, de vierde worp wel!

27 Het totaal aantal punten is 16 of meer, dus 16, 17 of 18.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 8

Aantal mogelijke volgordes

1 *Er worden drie kaarten tegelijk getrokken. Het aantal manier om twee sterren uit de 5 sterren én 1 cirkel uit de 5 cirkels te trekken wordt gevraagd.*
Totaal zijn er 25 kaarten, trek 2 sterren uit 5 én trek 1 cirkel uit 5. De volgorde van trekking doet er niet toe, dus er is sprake van een combinatie.
2 sterren en 1 cirkel kunnen op $\binom{5}{2} \cdot \binom{5}{1} = 10 \cdot 5 = 50$ manieren getrokken worden.

2 *Geen cirkel en geen ster.*
Totaal zijn er 25 kaarten, 15 kaarten zijn er zonder cirkel én zonder ster. Trek dus 3 kaarten uit deze 15 kaarten. De volgorde van trekking doet er niet toe, dus er is sprake van een combinatie.
Het aantal manieren is $\binom{15}{3} = 455$.

3 *Drie verschillende kaarten. Dus de volgorde is niet van belang. Kies dus zelf een eerste kaart, daarna uit de overblijvende de tweede en daarna de overige mogelijkheden voor de derde. In het schema is gekozen voor een start met de pijlkaart en daarna de sterkaart.*
De mogelijkheden zijn:

pijl	ster	omegateken	9 stippen	cirkel
x	x	x		
x	x		x	
x	x			x
x		x	x	
x		x		x
x			x	x
	x	x	x	
	x	x		x
	x		x	x
		x	x	x

Intelligentie van ratten

4 De eerste keer kan de rat kiezen uit 2 gangen, daarna uit 3, dan uit 4 enzovoort.
Er zijn totaal $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ routes mogelijk.

5 *Een route zonder fouten wil zeggen dat de rat geen gang met een gesloten deur in loopt.*
Doordat P wegvalt zijn er bij de derde horizontale gang nu 3 gangen i.p.v. 4 gangen goed, doordat Q wegvalt zijn er 4 wegen goed, doordat R wegvalt zijn er daarna 5 wegen goed en als laatste weer 7. Er zijn in totaal $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$ routes zonder fout mogelijk, dit is de helft van 5040 (het aantal mogelijke routes zie onderdeel 4).

6 *Tot de slimmen wordt de rat gerekend als hij bij de eerste 25% ratten hoort, dus de 25% met de minste fouten.*
Het percentage van de ratten die minder dan 39 fouten maakt is
2 + 4 + 4 + 4 + 5 + 8 = 27%.
Om tot de ‘slimmen’ gerekend te worden, moet de rat bij de 25% ratten horen die het minste fouten maken. Een rat die 40 fouten maakt hoort hier niet bij, dus wordt niet tot de ‘slimmen’ gerekend.

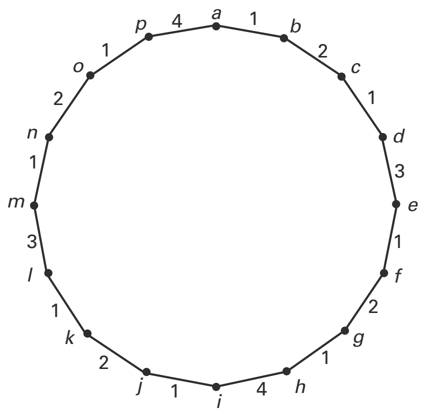
© ThiemeMeulenhoff

Codes op een schijf

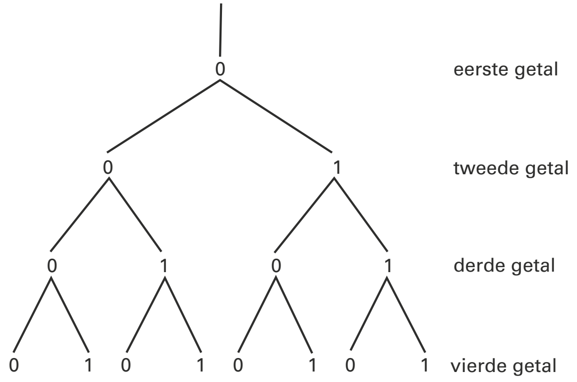
7 *Een donker vakje krijgt code 1 en een licht vakje code 0.*
De volgorde van de cijfers is van binnen naar buiten.
De codes zijn dan:

a = 0000	e = 0100	i = 1000	m = 1100
b = 0001	f = 0101	j = 1001	n = 1101
c = 0010	g = 0110	k = 1010	o = 1110
d = 0011	h = 0111	l = 1011	p = 1111

Voor de afstand tel je het aantal verschillende hokjes naast elkaar.
De afstand van a naar p is bijvoorbeeld 4 (alle hokjes verschillend).
De afstand van a naar b is bijvoorbeeld 1 alleen het buitenste hokje (of het laatste cijfer in de code) is verschillend. De graaf wordt nu:



8 Het eerste getal van de code is 0. Het tweede, derde en vierde getal kunnen 0 of 1 zijn.
Er zijn dan $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mogelijke codewoorden.
Ter verduidelijking een boomdiagram.

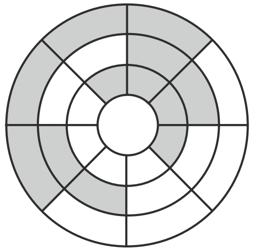


9 Er zijn 16 mogelijke codeantwoorden als de sensor precies op de grens tussen twee buursectoren komt die een afstand 4 hebben.
Afstand 4 wil zeggen dat twee naast elkaar liggende sectoren alle buurvakjes verschillend van kleur hebben. Dit is bijvoorbeeld het geval bij a en p of bij i en h.
Het aantal mogelijke codewoorden is dan $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

© ThiemeMeulenhoff

10 In figuur 3 is de afstand tussen twee buursectoren steeds 1.
Dit is de minimale afstand, want elk tweetal sectoren moet tenminste op één plaats verschillen. Komt de sensor precies boven de grens tussen twee buursectoren dan zijn er maar twee codewoorden mogelijk.
Bijvoorbeeld boven de grens van *a* en *p* kunnen nu alleen de codewoorden 0000 (= *a*) of 1000 (= *p*) ontstaan.

11 *Elke tweetal sectoren moet op tenminste één plaats verschillen.*
Alle mogelijke codewoorden van drie cijfers zijn dan:
111 - 000
110 - 101 - 011
100 - 010 - 001
De donkere vakjes moeten nu zo over de schijf verdeeld worden dat het aantal mogelijke afleesfouten tot een minimum beperkt wordt.
De afstand tussen twee buursectoren moet dan één zijn.
De codewoorden 111 - 110 - 101 - 011 - 100 - 010 - 001 - 000 moeten zo in de schijf geplaatst worden dat er tussen twee naast elkaar liggende sectoren steeds één verschil is.
Een mogelijkheid daarvoor is (zie de figuur):
111 - 110 - 100 - 000 - 010 - 011 - 001 - 101



Metrokaartjes

12 *Er worden 3 getallen uit de 9 cijfers gekozen (de volgorde is niet van belang).*
De volgorde van het knippen is niet van belang, het is dus een combinatie.
Dit kan op $\binom{9}{3}$ = 84 verschillende manieren.
Met nCr op de rekenmachine is de combinatie $\binom{9}{3}$ direct te berekenen).

13 *Er worden 2 gaatjes geponst, die niet in dezelfde rij of kolom zitten.*
eerste manier kijk naar aantal mogelijkheden voor eerste en tweede gaatje:
Bijvoorbeeld als het eerste gaatje in de twee komt dan mag het tweede gaatje niet meer in de rij en kolom van de twee komen en moet dus in 4, 6, 7 of 9 komen (er zijn dan nog vier plaatsen beschikbaar).
Het eerste gaatje kan op 9 plaatsen, het tweede gaatje kan daarna nog op 4 plaatsen.
Hiermee tel je bijvoorbeeld (2, 4) en (4, 2) als twee mogelijkheden, terwijl dit hetzelfde kaartje geeft.
Totaal zijn er dus $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$ mogelijkheden.

tweede manier start met het eerste gaatje in de 1^e^ rij en het 2^e^ gaatje in de 2^e^ rij.
Bekijk het aantal mogelijkheden:
De gaatjes kunnen in de 1^e en 2^e rij of de 1^e en 3^e rij of de 2^e en 3^e rij.
Het eerste gaatje komt in de 1^e rij (1, 2 of 3), het 2^e gaatje in de tweede rij.
Hier zijn $3 \cdot 2 = 6$ mogelijkheden voor (bijv. als het eerste gaatje in de 1 komt, mag het tweede gaatje niet in de 4 maar moet in de 5 of 6).
Voor de twee gaatjes in de 1^e en 3^e rij of in de 2^e en 3^e rij zijn ook 6 mogelijkheden.
Totaal zijn er $3 \cdot 6$ is 18 mogelijkheden.

14 *eerste manier per mogelijkheid:*
1 cijfer wegponsen kan op $\binom{9}{1}$ = 9 manieren,
2 cijfers wegponsen kan op $\binom{9}{2}$ = 36 manieren, enzovoort.
Totaal zijn er $\binom{9}{1} + \binom{9}{2} + \binom{9}{3} + \binom{9}{4} + \binom{9}{5} + \binom{9}{6} + \binom{9}{7} + \binom{9}{8} + \binom{9}{9} =$
$9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 511$ manieren.
Conclusie: op elk van de 400 treinen kan men op verschillende wijze gaatjes in een kaartje ponsen.
tweede manier met de driehoek van Pascal:
De som van de getallen op de 9^e rij van de driehoek van Pascal is 2^9, dit is de som van het aantal manieren om 0 of 1 of 2 of 3 of .....of 9 gaatjes te ponsen.
0 gaatjes ponsen kan op $\binom{9}{0}$ = 1 manier.
Er zijn dus $2^9 - 1 = 511$ verschillende mogelijkheden om minstens 1 gaatje te ponsen.
Conclusie: op elk van de 400 treinen kan men op verschillende wijze gaatjes in een kaartje ponsen.

Combinaties

15 *Er worden 3 kaartjes uit 10 getrokken, waarvan de volgorde niet van belang is (ze worden na het trekken pas op alfabetische volgorde gelegd).*
Er zijn totaal $\binom{10}{3}$ = 120 kaartjes nodig.

16 *A staat er al op, er moeten nog 2 straten gekozen worden. Dit kan door er 2 uit de overige 9 letters te kiezen.*
Het aantal combinaties met A erop = $\binom{9}{2}$ = 36.

17 *A en B staan er al op dus de laatste straat kan gekozen worden uit C, D, E, F, G, H, K en L.*
Het aantal combinaties met A én B erop = $\binom{8}{1}$ = 8.
of
A en B staan er al op, dus er zijn nog 8 letters over zijn om uit te kiezen, dus 8 kaartjes.

18 *Als de proefpersoon 7 keer voor AB, 7 keer voor AC en 7 keer voor AD kiest dan moeten deze combinaties ook minstens zó vaak los van elkaar voorkomen.*
Er zijn 8 combinaties met AB (zie vorige onderdeel), namelijk:
ABC, <u>ABD</u>, ABE, ABF, ABG, ABH, ABK, ABL.
Er zijn 8 combinaties met AC:
<u>ABC</u>, ACD, ACE, ACF, ACG, ACH, ACK, ACL, hiervan hebben we ABC ook bij AB opgeschreven.
Er zijn 8 combinaties met AD:
ABD, <u>ACD</u>, ADE, ADF, ADG, ADH, ADK, ADL, hiervan hebben we ABD ook bij AB opgeschreven en ACD ook bij AC.
Laat je nu uit de bovenstaande combinaties de onderstreepte weg dan is dat een mogelijkheid voor 7 keer AB, 7 keer AC en 7 keer AD.

Tai Sai

19 *Schrijf de verschillende mogelijkheden op.*

1 – 1 – 4 kan op $\binom{3}{2}$ = 3 manieren (1 – 1 – 4, 1 – 4 – 1, 4 – 1 – 1)

1 – 2 – 3 kan op 3! = 3 · 2 · 1 = 6 manieren (1 – 2 – 3, 1 – 3 – 2, 2 – 1 – 3, 2 – 3 – 1, 3 – 1 – 2, 3 – 2 – 1)

2 – 2 – 2 kan op 1 manier

Conclusie: totaal zijn er 3 + 6 + 1 = 10 mogelijkheden.

Kunstrijden op de schaats

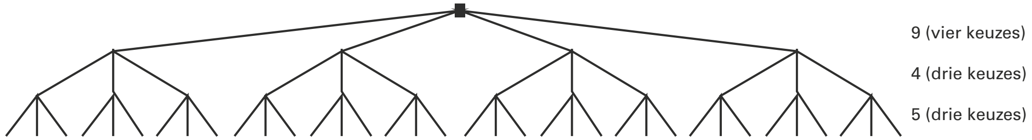
20 *Voor de eerste drie plaatsen zijn er drie mogelijkheden, voor de vierde t/m de zevende plaats zijn er vier mogelijkheden.*
Voor plaats 1 t/m 3 kiest het jurylid uit de drie Zweedse schaatsers.
Dit kan op 3 · 2 · 1 = 3! = 6 manieren.
En voor plaats 4 t/m 7 kiest hij uit de overige 4 schaatsers. Dit kan op 4 · 3 · 2 · 1 = 4! = 24 manieren.
In totaal zijn er dus 3! · 4! = 6 · 24 = 144 manieren.

21 *Er zijn 5 juryleden en elk van de lijsten van de juryleden wordt met elkaar vergeleken. Oftewel hoeveel combinaties zijn er om twee uit vijf te trekken.*
eerste manier, uitschrijven:
Noem de juryleden bijv. A, B, C, D en E
De mogelijke manieren om twee te vergelijken, waarbij de volgorde er niet toe doet, dus AB is hetzelfde als BA zijn: AB, AC, AD, AE, BC, BC, BE, CD, CE, DE.
Totaal zijn dit 10 manieren.
tweede manier, met formule:
De volgorde van de twee juryleden doet er niet toe (AB is hetzelfde als BA)
dus er zijn $\binom{5}{2}$ = 10 manieren om de lijsten met elkaar te vergelijken.

FF snel sms'en

22 *Ga na aan welke (drie) voorwaarden een mobiel telefoonnummer moet voldoen.*
De eerste twee cijfers zijn altijd 06 dus deze cijfers staan vast, dus één keuzemogelijkheid. Voor het derde cijfer is er keuze uit 6 mogelijkheden (1, 2, 3, 4, 5 of 8). Voor de overige (zeven) cijfers is er steeds een keuze uit 10 mogelijkheden (0 t/m 9). Er zijn dus $1 \times 1 \times 6 \times 10^7 = 6 \times 10^7$ mogelijkheden.
82,2% van 6×10^7 is uitgegeven, dus dit zijn $0{,}822 \times 6 \times 10^7 = 4{,}932 \times 10^7 = 49{,}32 \times 10^6$
Conclusie: er zijn 49,32 miljoen mobiele telefoonnummers uitgegeven.

23 *Bekijk eerst het aantal mogelijkheden per toets.*
Toets 9 heeft 4 mogelijkheden. Toets 4 heeft 3 mogelijkheden. Toets 5 heeft 3 mogelijkheden.



Conclusie: er zijn 4 · 3 · 3 = 36 mogelijkheden.

© ThiemeMeulenhoff

Wat zeg je?

24 *Er zijn 10 woorden, per woord zijn er 4 mogelijkheden.*
Voor het eerste woord zijn er vier keuzemogelijkheden, voor het tweede woord ook, enzovoorts.
Er zijn dus 4^{10} keuzemogelijkheden.
Conclusie: er zijn 1 048 576 keuzemogelijkheden.

Hog

25 *Gooi met vier verschillend gekleurde dobbelstenen, hoeveel manieren zijn er om 3, 3, 2 en 5 te gooien. Let op: er wordt twee keer eenzelfde getal (drie) gegooid. Wat heeft dit voor gevolg voor het aantal verschillende series?*

eerste manier, start met de drieën:

De twee drieën kunnen op $\binom{4}{2}$ = 6 of 4nCr2 = 6 manieren over de vier kleuren verdeeld worden. Er zijn dan nog twee kleuren over. De 2 en de 5 kan je op twee manieren over deze twee kleuren verdelen.
Totaal zijn er dan 6 · 2 = 12 verschillende manieren.
Conclusie: 12 verschillende manieren.

tweede manier, start met de twee:
Er zijn 4 verschillende kleuren voor het getal 2, dan nog maar 3 verschillende kleuren voor het getal 5, en voor de twee 3-en blijft dan maar één mogelijkheid over, dus 4 · 3 · 1 = 12 verschillende manieren.
Conclusie: 12 verschillende manieren.

derde manier, bekijk eerst het aantal manieren voor 4 verschillende cijfers:
Er zijn 4! = 24 rijtjes met vier verschillende nummers.

Twee nummers zijn hetzelfde, dus er zijn $\frac{4!}{2!}$ = 12 verschillende rijtjes van 3325

Conclusie: 12 verschillende manieren.

vierde manier, uitschrijven van alle mogelijkheden:

Rood	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	**3**	2	5	2	5	2	5
Wit	**3**	**3**	2	5	2	5	**3**	**3**	**3**	**3**	5	2
Blauw	2	5	**3**	**3**	5	2	**3**	**3**	5	2	**3**	**3**
Zwart	5	2	5	2	**3**	**3**	5	2	**3**	**3**	**3**	**3**

Conclusie: 12 verschillende manieren.

Pig

26 *Let op: bij het werpen van de dobbelsteen zijn er niet altijd 6 toegestane uitkomsten, als er een 1 wordt geworpen, gaat de beurt naar de tegenstander.*
Er wordt 4 keer geworpen.
De eerste drie worpen mag er een 2, 3, 4, 5 of 6 worden geworpen (geen 1, want dan gaat de beurt naar de tegenstander).
De vierde worp mag er een 1, 2, 3, 4, 5 of 6 worden geworpen (dus wel een 1).
Dus het aantal mogelijke rijtjes is 5 · 5 · 5 · 6 = 750.
Conclusie: totaal 750 mogelijkheden.

© ThiemeMeulenhoff

27 *De mogelijke totalen zijn 16, 17 en 18.*
Totaal 18 kan met 6, 6, 6
Totaal 17 kan met 6, 6, 5 of 6, 5, 6 of 5, 6, 6
Totaal 16 kan met 6, 6, 4 of 6, 4, 6 of 4, 6, 6 of 6, 5, 5 of 5, 6, 5 of 5, 5, 6
Ga na dat rijtjes met een 3, 2 of 1 niet voorkomen.
Een hulpmiddel kan een boomdiagram zijn.

© ThiemeMeulenhoff

9 Onderzoeksopgaven

Toerisme en malaria

Malaria is een infectieziekte die veroorzaakt wordt door eencellige parasieten.
De parasiet wordt op mensen overgebracht door malariamuggen.
Veel toeristen die tropische landen bezoeken slikken geen pillen tegen malaria. Ze vinden het risico van 6% om besmet te worden kennelijk acceptabel.
Bij thuiskomst willen ze toch graag zekerheid of ze al of niet besmet zijn met malaria en laten zich daarop testen.
Als een test aangeeft dat men besmet is heet dat een positieve uitslag. Bij een negatieve uitslag geeft de test aan dat men niet besmet is.
Er zijn tests die snel uitslag geven maar niet volledig betrouwbaar zijn.

Bij een zekere malariatest wordt met de test slechts bij 77% van de besmette personen vastgesteld dat zij inderdaad besmet zijn.
Bij 95% van de niet-besmette personen is de uitslag negatief.
Met behulp van bijvoorbeeld een kruistabel kan deze test nader onderzocht worden.

1 Leg uit waarom een toerist niet veel wijzer wordt van de uitslag van deze test.

Brandstofverbruik

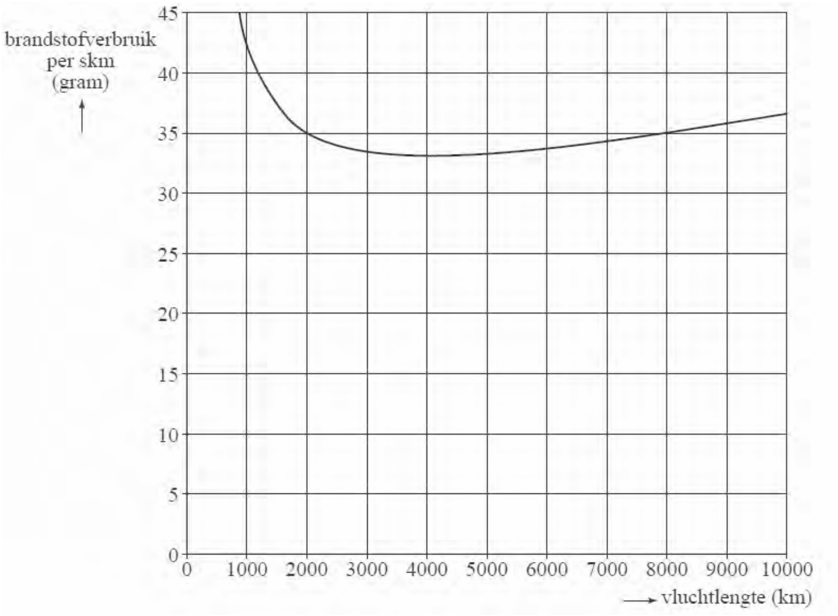
Vliegen kost veel brandstof. Een flink deel van de totale kosten van een vlucht bestaat uit brandstofkosten. Voor vliegmaatschappijen is het dus interessant om zuinige vliegtuigen te gebruiken.
Om het brandstofverbruik van verschillende typen vliegtuigen te kunnen vergelijken, kijkt men naar het brandstofverbruik per kilometer per passagier. Men gaat er daarbij van uit dat alle plaatsen (stoelen) in het vliegtuig bezet zijn. Dit brandstofverbruik per kilometer per passagier wordt **brandstofverbruik per skm** (stoelkilometer) genoemd en wordt uitgedrukt in gram.

We gaan er in deze opgave van uit dat een vliegtuig altijd precies de hoeveelheid brandstof meeneemt die voldoende is voor de lengte van de vlucht.

In figuur 1 is voor een vliegtuigtype met 524 stoelen aan boord het brandstofverbruik per skm uitgezet tegen de vluchtlengte in km.

© ThiemeMeulenhoff

figuur 1

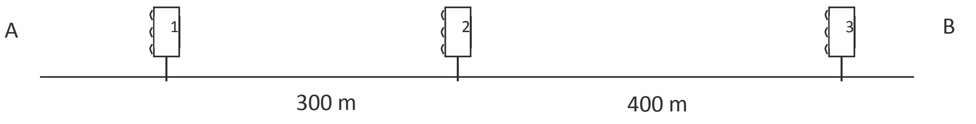


Een toestel van dit type moet worden ingezet op een vlucht met een lengte van 9000 kilometer. Wanneer er mogelijkheden zijn voor een tussenlanding kan dat voordelig zijn, want voor kortere vluchten is het brandstofverbruik per skm lager doordat er minder brandstof meegenomen hoeft te worden.

2 Onderzoek of men door het maken van één tussenlanding ten minste 5% aan brandstof kan besparen.

Groene zone

Op een weg tussen A en B staan achter elkaar 3 werkende verkeerslichten. Alledrie de verkeerslichten hebben een even grote tijd groen licht (maar niet persé op hetzelfde moment). De afstand tussen verkeerslicht 1 en verkeerslicht 2 is 300 meter en tussen verkeerslichten 2 en 3 zit 400 meter. Zie onderstaande figuur.



De bedoeling is dat er een zogenoemde **groene zone** ingesteld wordt op deze weg. Bij die groene zone wordt ervoor gezorgd dat een auto die met een snelheid van 50 km/u over deze weg van A naar B rijdt, bij alle verkeerslichten groen heeft.

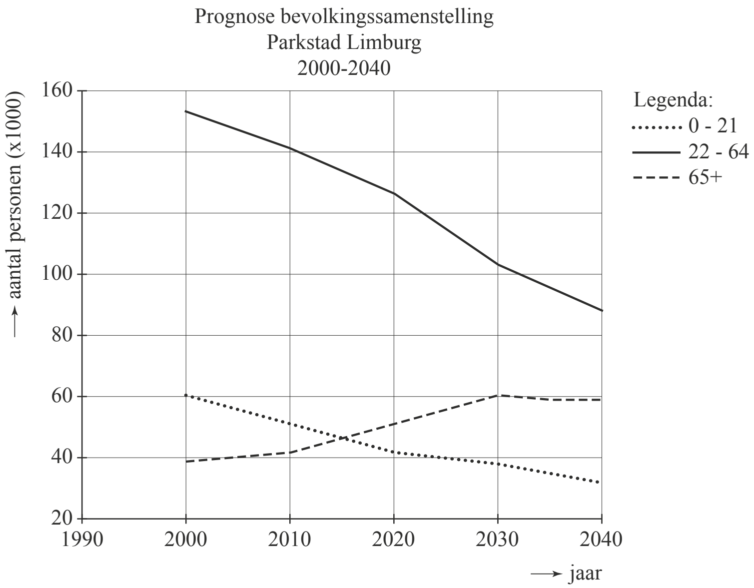
3 Geef aan hoe de lichten afgesteld moeten zijn om die groene zone te realiseren.

© ThiemeMeulenhoff

Parkstad Limburg

In de krant lees je vaak over de dreigende vergrijzing: het percentage 65-plussers zal de komende jaren spectaculair stijgen.
Stadsregio Parkstad Limburg omvat acht gemeenten in Zuidoost-Limburg met ongeveer 252 000 inwoners in 2000. Er zijn prognoses gemaakt van de bevolkingssamenstelling tot 2040. Zie figuur 2.
Bestuurders van Parkstad Limburg willen duidelijk maken dat de dreigende vergrijzing ook voor Parkstad Limburg geldt.

figuur 2



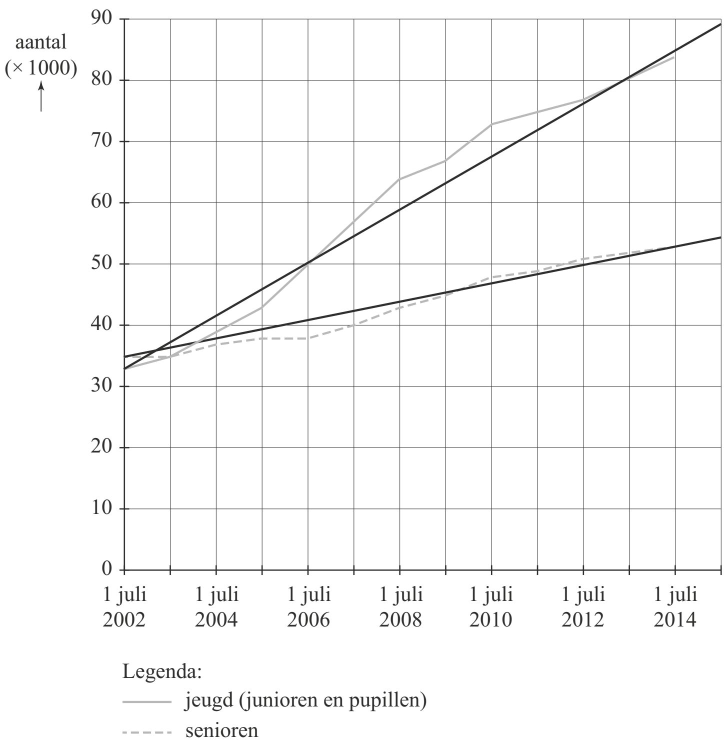
4 Maak voor deze bestuurders aan de hand van de gegevens van de figuur een grafiek waarin de spectaculaire stijging van het percentage 65-plussers zichtbaar is.
Geef hiermee vervolgens een schatting van het percentage 65-plussers in Parkstad Limburg in 2050.

© ThiemeMeulenhoff

Vrouwenvoetbal

Vrouwenvoetbal is in. Steeds meer vrouwen en meisjes in Nederland zijn lid van een voetbalclub. In de figuur zie je de ontwikkeling van het aantal vrouwelijke leden van voetbalclubs in de periode 2002 tot en met 2014, telkens gemeten op 1 juli van het betreffende jaar. In de figuur is onder andere te zien dat zowel bij de jeugd als bij de senioren het aantal leden toeneemt.
Omdat het aantal leden bij de jeugd sneller groeit dan bij de senioren, wordt het percentage senioren bij de voetbalsters steeds lager. In 2002 was nog iets meer dan 50% van de voetbalsters senior, in 2014 was dat percentage geslonken tot minder dan 40%.

figuur



De ontwikkeling van zowel het aantal leden bij de jeugd als bij de senioren is te benaderen door een lineair verband. De bijbehorende lijnen zijn in de figuur weergegeven. We gaan ervan uit dat de aantallen leden van de beide groepen zich volgens de getekende lijnen zullen blijven ontwikkelen. Het percentage senioren zal dan nog verder afnemen.

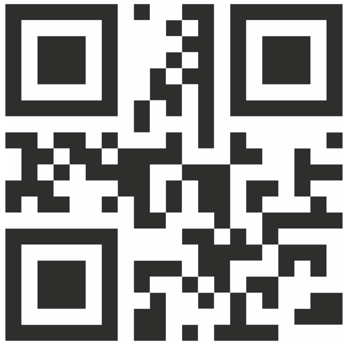
In een bepaald jaar zal op 1 juli het percentage senioren voor het eerst lager zijn dan 35% van het totaal aantal leden.

5 Onderzoek in welk jaar dat is.

QR-code

Tegenwoordig zie je vaak Quick Responsecodes, ofwel QR-codes. Door zo'n QR-code met je mobiele telefoon te 'lezen' krijg je informatie over een bepaald product of word je doorgeschakeld naar een website.
Een QR-code is een vierkante figuur die is opgebouwd uit kleine zwarte en witte hokjes, zie figuur 1a.

figuur 1a QR-code

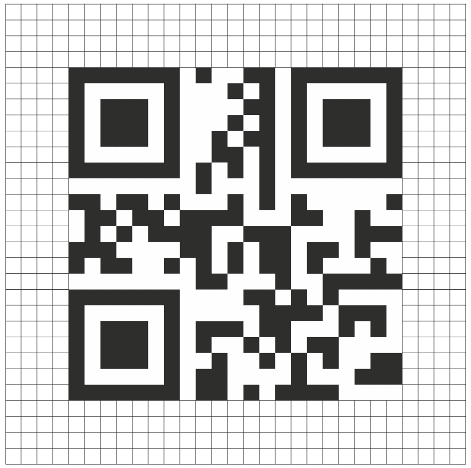


In drie hoeken van een QR-code zijn er hokjes volgens een vast patroon ingekleurd. De overgebleven hokjes van een QR-code zijn zwart of wit gekleurd afhankelijk van de informatie die de QR-code moet bevatten.

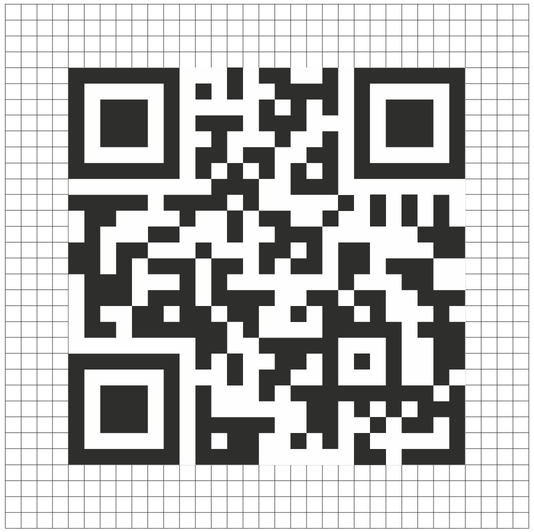
De QR-code in figuur 1a bestaat uit 441 hokjes, ofwel uit 21 bij 21 hokjes. QR-codes van dit formaat zijn de kleinste die bestaan en krijgen daarom versienummer 1.
Er zijn ook QR-codes met een hoger versienummer. De grootste QR-codes bestaan uit 177 bij 177 hokjes en het bijbehorende versienummer is dan 40. Het verband tussen het aantal hokjes op de onderste regel van een QR-code en het versienummer is lineair.

De totale ruimte die nodig is om een QR-code weer te geven, wordt niet alleen bepaald door het versienummer. Het wordt aangeraden om rondom elke QR-code voldoende witruimte te hebben. We gaan ervan uit dat rondom elke QR-code een witte rand gebruikt wordt van 4 hokjes breed, ongeacht het versienummer. In figuur 1b zie je hoe dat eruitziet bij een QR-code met versienummer 1 en in figuur 2 bij een QR-code met versienummer 2. Voor de duidelijkheid zijn de hokjes van de witte rand getekend.

figuur 1b **Totale benodigde ruimte bij een QR-code met versienummer 1**



figuur 2 **Totale benodigde ruimte bij een QR-code met versienummer 2**



Een deel van de totale benodigde ruimte wordt dus in beslag genomen door de witte rand. Bij een QR-code met versienummer 1, zoals in figuur 1b, is dat deel ongeveer gelijk aan 48%. Bij een QR-code met versienummer 2, zoals in figuur 2, is dat deel ongeveer 43%. Hoe groter het versienummer, des te kleiner is het percentage.

6 Bereken hoe groot dat percentage is bij een QR-code met versienummer 25.

© ThiemeMeulenhoff

Hints bij hoofdstuk 9

Hanteer bij alle opgaven het stappenplan:
- Lees de opgave helemaal door
- Noteer de relevante informatie
- Wat wordt gevraagd en zijn er deelvragen die eerst opgelost moeten worden, voordat de definitieve vraag beantwoord kan worden?
- Bedenk een aanpak
- Controleer op het einde of de vraag beantwoord is.

1 Verwerk de gegevens in een kruistabel met bijvoorbeeld horizontaal de uitslag van de test en verticaal wel/niet besmet.

2 Onderzoek of met het maken van een tussenlanding minstens 5% brandstof is te besparen. Maak gebruik van de grafiek en bepaal eerst skm voor een vlucht zonder tussenstop en daarna voor een vlucht met een tussenstop bijvoorbeeld na 4500 km.

3 Bereken de tijd over 300 meter en over 400 meter en ga na wat dit met de stoplichten te maken heeft zodat een groene zone wordt gerealiseerd.

4 Maak eerst een grafiek met het percentage 65-plussers. Kies hiervoor een aantal jaren om het aantal 65-plussers te berekenen. Lees voor deze jaren eerst het totaal aantal personen af van de drie leeftijdsklassen. Verwerk dit bijvoorbeeld overzichtelijk in een tabel. Nadat de grafiek getekend is, kun je met behulp van de grafiek een schatting geven van het percentage in 2050.

5 De formules zijn lineair, dus van de vorm $V = a \cdot t + b$. Bepaal met behulp van de grafiek eerst de formules voor het aantal senioren en het aantal jeugdleden.

6 Bepaal eerst het aantal hokjes in de onderste regel van versienummer 25. Maak een schets.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij hoofdstuk 9

Toerisme en malaria

1 *Lees eerst de hele opgave door en noteer de relevante informatie.*
Relevante informatie:
Zonder pillen is het risico om besmet te worden met malaria 6%.
De uitslag van de test op malaria bij thuiskomst heet
- positief als men besmet is
- negatief als men niet besmet is.

Een zekere malariatest is niet geheel betrouwbaar.
- Bij 77% van de besmette personen wordt vastgesteld dat men ook echt besmet is.
- Bij 95% van de niet besmette personen is de uitslag negatief

Vraag: leg uit waarom de toerist niet veel wijzer wordt van de uitslag van de test?
Aanpak: verwerk de gegevens in een kruistabel waarin men de gegevens verwerkt. Dus bijvoorbeeld verticaal besmet ja of nee en horizontaal uitslag test positief of negatief.
uitwerking
- 6% is besmet, dus plaats 6 in de cel bij ja – totaal
- 77% van de besmette personen krijgt een positieve uitslag, dus 77% van 6 is $0{,}77 \cdot 6 = 4{,}62$
- Dus 100 – 77 = 23 % van de besmette personen krijgt een negatieve uitslag, dus 23% van 6 is $0{,}23 \cdot 6 = 1{,}38$
- 95% van de niet besmette personen, dus 95% van 94 is $0{,}95 \cdot 94 = 89{,}3$ staat bij nee en negatief
- De rest van de kruistabel kan nu ingevuld worden.

Onderstaande getallen zijn in procenten

		Uitslag test		
		positief	negatief	totaal
besmet	ja	4,62	1,38	6
	nee	4,7	89,3	94
	totaal	9,32	90,68	100%

Kijk in de eerste kolom bij positief: 4,62% heeft een positieve uitslag en is echt besmet, maar 4,7% krijgt een positieve uitslag en is niet besmet. Er is dus nog steeds grote onzekerheid of je wel of niet besmet bent als je een positieve uitslag krijgt.
Conclusie: 9,3% krijgt een positieve uitslag, maar de helft van deze uitslagen is vals alarm, de test geeft dus geen goede informatie of je echt besmet bent.

Brandstofverbruik

2 *Lees eerst de hele opgave door en noteer de relevante informatie.*
Relevante informatie:
- Men wil het brandstofverbruik van verschillende typen vliegtuigen vergelijken.
- Kijk naar brandstofverbruik per kilometer per passagier = **brandstofverbruik per skm** (stoelkilometer)
- skm wordt uitgedrukt in gram
- Men gaat er van uit dat alle plaatsen (stoelen) in het vliegtuig bezet zijn.
- Figuur gaat over type met 524 stoelen
- Lengte van de vlucht is 9000 km
- Tussenlandingen kunnen voordelig zijn, want men kan dan bijtanken en men hoeft minder brandstof mee te nemen waardoor het brandstofverbruik lager wordt.

© ThiemeMeulenhoff

Vraag: is het mogelijk om door het maken van één tussenlanding ten minste 5% aan brandstof te besparen?
Aanpak:
Het gaat om het totale brandstofverbruik. De totale vlucht duurt 9000 km met 524 stoelen.
Gebruik de grafiek en lees het skm af bij een vlucht zonder tussenstop en voor een vlucht met tussenstop (bijvoorbeeld een tussenstop halverwege).
Bereken het totale brandstof verbruik voor de totale vlucht in beide gevallen.
Bereken het besparingspercentage en geef een conclusie.

uitwerking
eerste manier, het aantal passagiers blijft gelijk, de totale vluchtlengte blijft gelijk, dus het is voldoende om te kijken naar skm:
skm voor een vlucht zonder tussenstop
De vluchtlengte is 9000 km dus brandstofverbruik per skm is 36 gram (aflezen uit de figuur).
skm voor een vlucht met een tussenstop na 4500 km
Bij een vluchtlengte van 4500 km is brandstofverbruik per skm ongeveer 33,5 gram (aflezen uit de figuur).

Besparing in procenten is $\frac{36-33{,}5}{36} \cdot 100\,\% = \frac{2{,}5}{36} \cdot 100\,\% \approx 6{,}94\%$
Conclusie: de besparing is ongeveer 6,9%, dus men kan meer dan 5% besparen.

tweede manier, kijk naar het totale brandstofverbruik:
Brandstofverbruik voor een vlucht zonder tussenstop
De vluchtlengte is 9000 km dus brandstofverbruik per skm is 36 gram (aflezen uit figuur 1).
Totaal zijn er 524 stoelen en er wordt 9000 km gevlogen.
Het totale brandstofverbruik voor de vlucht is $524 \cdot 9000 \cdot 36 = 169\,776\,000$ gram = 169 776 kg.
Brandstofverbruik voor een vlucht met een tussenstop na 4500 km
Bij een vluchtlengte van 4500 km is brandstofverbruik per skm ongeveer 33,5 gram (aflezen uit figuur 1).
Totaal zijn er 524 stoelen en er wordt 9000 km gevlogen.
Het totale brandstofverbruik voor de vlucht is $524 \cdot 9000 \cdot 33{,}5 = 157\,986\,000$ gram = 157 986 kg.

Besparing is $\frac{169\,776\,000 - 157\,986\,000}{169\,776\,000} \cdot 100\,\% = \frac{11\,790\,000}{169\,776\,000} \cdot 100\,\% \approx 6{,}94\%$.
Conclusie: de besparing is ongeveer 6,9%, dus men kan meer dan 5% besparen.

Groene zone

3 *Lees eerst de hele opgave door en noteer de relevante informatie.*
Relevante informatie:
- Van A naar B staan 3 werkende verkeerslichten
- De tijd groen licht is bij alle drie even groot
- De afstand van verkeerslicht 1 tot verkeerslicht 2 is 300 m
- De afstand van verkeerslicht 2 tot verkeerslicht 3 is 400 m
- Op deze weg wil men een groene zone instellen bij een snelheid van 50 km/uur

Vraag: hoe worden de lichten afgesteld om de groene zone te realiseren?
Aanpak: De snelheid van de auto is 50 km/uur. Bereken de tijd over 300 meter en de tijd over 400 meter.

© ThiemeMeulenhoff

uitwerking

1 uur is 3600 seconden, dus 50 km/uur = 50 000 m/uur = $\frac{50\,000}{3600} \approx 13{,}89$ m/sec

De tijd over 300 meter is $\frac{300}{13{,}89} \approx 21{,}6$ sec

De tijd over 400 meter is $\frac{400}{13{,}89} \approx 28{,}8$ sec

Conclusie: stoplicht 1 springt op groen, dan springt stoplicht 2 hoogstens 21,6 seconden later op groen en stoplicht 3 springt hoogstens 28,8 seconden na stoplicht 2 op groen.

Parkstad Limburg

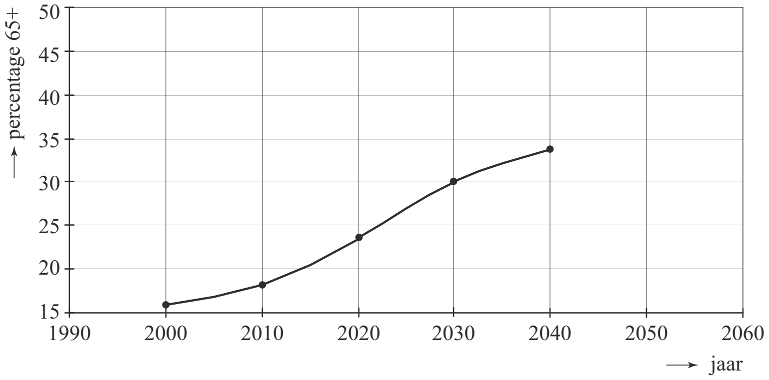
4 *Lees eerst de hele opgave door, gebruik de grafiek en noteer de relevante informatie.*
Relevante informatie Parkstad Limburg:

- Spectaculaire stijging van aantal 65-plussers
- 252 000 inwoners in 2000
- Prognose tot 2040 is af te lezen in de figuur
- De grafiek met - - - gaat over 65+

Vraag a: maak een grafiek waarin de spectaculaire stijging van het **percentage** 65-plussers zichtbaar is.
Vraag b: geef een schatting van het percentage 65-plussers met behulp van de grafiek die gemaakt is.
Aanpak: Gevraagd wordt naar het percentage 65-plussers.
Kies een aantal jaren om het percentage 65-plussers te berekenen.
Lees voor deze jaren het aantal 0-21 jarige, het aantal 22-64 jarige en het aantal 65-plussers uit de grafiek af.
Bereken voor deze jaren eerst het totaal aantal personen en daarna het percentage 65-plussers.
Teken de grafiek (dit is het antwoord op vraag a).
Extrapoleer nu om vraag b te beantwoorden.
uitwerking vraag a
uit de grafiek de waarden in de grijs gearceerde kolommen aflezen

jaar	0-21	22-64	65+	totaal	Percentage 65+
2000	60	152	40	252	$\frac{40}{242} \cdot 100\% \approx 15{,}9\%$
2010	50	140	42	232	$\frac{42}{232} \cdot 100\% \approx 18{,}1\%$
2020	42	126	52	220	$\frac{50}{220} \cdot 100\% \approx 23{,}6\%$
2030	38	104	60	202	$\frac{60}{202} \cdot 100\% \approx 29{,}7\%$
2040	32	88	60	180	$\frac{60}{180} \cdot 100\% \approx 33{,}3\%$

Teken een grafiek door de punten (2000; 15,9), (2010; 18,1), (2020; 23,6), (2030; 29,7), (2040; 33,3).



Conclusie: er is dus een spectaculaire stijging te zien van het percentage 65-plussers.

uitwerking vraag b: schat het percentage 65-plussers in 2050
Trek in de grafiek een rechte lijn door de punten (2030; 29,7), (2040; 33,3).
De stijging van het percentage tussen 2030 en 2040 is volgens de grafiek 33,3 – 29,7 = 3,6 %.
Als de grafiek tussen 2040 en 2050 op dezelfde manier doorgaat als tussen 2030 en 2040 dan stijgt het percentage nogmaals met 3,6% dus het totale percentage wordt dan 33,3 + 3,6 = 36,9% oftewel ongeveer 37%.
Deze waarde mag je ook aflezen uit de grafiek.
Conclusie vraag b: een schatting voor het percentage 65-plussers in Parkstad in 2050 is ongeveer 37%.

Vrouwenvoetbal

5 *In een bepaald jaar is het percentage senioren voor het eerst lager dan 35% van het totaal aantal leden.*
De formules voor de aantallen senioren en de jeugd zijn lineair, dus van de vorm $V = at + b$.
Neem bijvoorbeeld $t = 0$ is 1-7-2002 en t in jaren.
Voor de senioren geldt:
de lijn gaat door de punten (0, 35 000) en (12, 53 000).

De richtingscoëfficiënt is $a = \frac{53\,000 - 35\,000}{12} = 1500$ en de grafiek gaat door (0, 35 000).

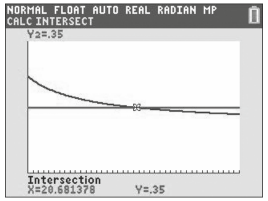
De vergelijking van de aantallen senioren is $V_{senioren} = 1500t + 35\,000$.
Voor de jeugdspelers geldt:
de lijn gaat door de punten (0, 33 000) en (12, 85 000).

De richtingscoëfficiënt is $a = \frac{85\,000 - 33\,000}{12} \approx 4333$ en de grafiek gaat door (0, 33 000).

De vergelijking van de aantallen senioren is $V_{jeugd} = 4333t + 33\,000$.
Voor het totaal aantal leden geldt:
$V_{leden} = V_{jeugd} + V_{senioren} = 4333t + 33\,000 + 1500t + 35\,000 = 5833t + 68\,000$.

Als het percentage senioren gelijk is aan 35% van het totaal aantal leden geldt:

$\frac{1500 \cdot t + 35\,000}{5833 \cdot t + 68\,000} \cdot 100\% = 35\%$ of $\frac{1500 \cdot t + 35\,000}{5833 \cdot t + 68\,000} = 0{,}35$.



Gebruik de grafische rekenmachine.

voer in $y_1 = \frac{(1500 \cdot x + 35\,000)}{(5833 \cdot x + 68\,000)}$ en $y_2 = 0{,}35$.

WINDOW bijvoorbeeld [0, 40] × [0; 0,70]

Intersect geeft $x = 20{,}7$.

Conclusie: in het jaar 2023 (2002 + 21) is voor het eerst het percentage senioren lager dan 35% van het totaal aantal leden.

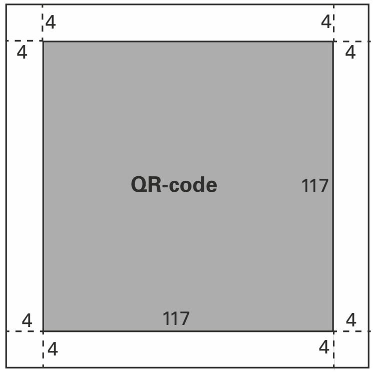
QR-code

6 *Gevraagd wordt naar het percentage van de witte rand ten opzichte van het geheel van versienummer 25.*

eerste manier, door logisch redeneren:
Versienummer 1 bestaat uit 441 hokjes, ofwel 21 bij 21.
Versienummer 40 bestaat uit 177 bij 177 hokjes.
Het verband tussen het aantal hokjes in de onderste regel is lineair.
Van versienummer 1 naar 40 is er een toename van 177 – 21 = 156.

Dus per versienummer is de toename $\frac{177 - 21}{40 - 1} = \frac{156}{39} = 4$.

Het aantal hokjes op de onderste rij van versienummer 25 is dan 21 + 24 · 4 = 117.



De buitenrand bestaat uit 4 hokjes rondom (zie schets).
De breedte (= lengte) van de figuur wordt nu
4 + 117 + 4 = 125.
De totale figuur bestaat inclusief witte rand uit
125 · 125 = 15 625 hokjes.
De binnenfiguur bestaat uit 117 · 117 = 13 689 hokjes.
Dus de buitenrand bestaat uit
15 625 – 13 689 = 1936 hokjes.

Conclusie: de witte rand neemt $\frac{1936}{15\,625} \cdot 100 \approx 12{,}39\%$ ruimte in beslag.

tweede manier, met behulp van de figuren en een formule $h = av + b$:
Versienummer 1 bestaat 21 hokjes op de onderste regel.
Versienummer 2 bestaat uit 25 hokjes op de onderste regel (zie figuur 2).
Er is dus een toename per 4 bij een verhoging van het versienummer met 1.
Dus $h = 4v + b$ met h aantal hokjes op de onderste regel en v het versienummer.
(1, 21) of (2, 25) invullen geeft $b = 17$, dus $h = 4v + 17$.
$v = 25$ geeft $h = 4 \cdot 25 + 17 = 117$.

De buitenrand bestaat uit 4 hokjes rondom (zie schets).
De breedte (= lengte) van de figuur wordt nu 4 + 117 + 4 = 125.
De totale figuur bestaat inclusief witte rand uit 125 · 125 = 15 625 hokjes.
De binnenfiguur bestaat uit 117 · 117 = 13 689 hokjes.
Dus de buitenrand bestaat uit 15 625 – 13 689 = 1936 hokjes.

Conclusie: de witte rand neemt $\frac{1936}{15\,625} \cdot 100 \approx 12{,}39\%$ ruimte in beslag.

© ThiemeMeulenhoff

Oefenen met hele examens, met hints om je op weg te helpen en uitleg bij de goede antwoorden.

Deel 2a Examens met uitwerkingen

Examen 2017-I

Akkerranden

Langs akkers zie je tegenwoordig vaak kleurige stroken met bloemen of met gras en kruiden. Deze stroken worden akkerranden genoemd. Ze worden aangelegd door boeren die een gedeelte van hun landbouwgrond gebruiken voor natuurbeheer. Akkerranden bieden namelijk leefruimte aan vogels, bijen en vlinders. Ze zijn ook aantrekkelijk voor toeristen.

In de tabel staat aangegeven wat de kosten van een akkerrand per hectare zijn (1 hectare = 10 000 m^2).

tabel **kosten op jaarbasis in euro per hectare akkerrand**

	bloemenrand	**gras-kruidenrand**
zaaizaad	400	100
grondbewerking	250	63
zaaien	390	146
onderhoud (o.a. onkruid verwijderen)	475	400
management (o.a. administratie)	150	150

Boeren kunnen van de gemeente subsidie krijgen voor het aanleggen van een akkerrand. Voor gemeenten telt vooral de toeristische waarde van een akkerrand, daarom wordt het subsidiebedrag alleen bepaald door de lengte van de akkerrand. Deze lengte wordt uitgedrukt in **strekkende meters**: 1 strekkende meter betekent dat de lengte 1 meter is, ongeacht de breedte.

In de Hoeksche Waard golden in 2013 de volgende regels:
- De akkerrand dient minimaal 3,5 meter breed te zijn.
- Het subsidiebedrag is € 0,63 per strekkende meter bloemenrand.
- Het subsidiebedrag is € 0,53 per strekkende meter gras-kruidenrand.
- Naast het subsidiebedrag worden de kosten van het zaaizaad en het zaaien vergoed.
- Alle overige kosten zijn voor rekening van de boer.

In deze opgave gaan we ervan uit dat de breedte van een akkerrand altijd 3,5 meter is.

Daan de Geus, een boer in de Hoeksche Waard, legde in 2013 bloemenranden aan over een totale lengte van 2500 meter.

4p **1** Laat zien dat het subsidiebedrag dat hij ontving hoger was dan het bedrag dat hij kwijt was aan de kosten van grondbewerking, onderhoud en management.

Hoewel het erop lijkt dat er aan een akkerrand aardig te verdienen valt, zal een boer niet op deze manier rekenen. Op de landbouwgrond waarop hij een akkerrand

aanlegt, hadden immers ook gewassen kunnen groeien. De winst daarvan mist de boer. Dit heet **winstderving**.

Voor de nettowinst *W* die in 2013 in de Hoeksche Waard gemaakt werd op een gras-kruidenrand met een lengte van 100 meter geldt de formule

$W = 100 \cdot S - 0,035 \cdot D - 21,455$

In deze formule is *W* de nettowinst per 100 meter gras-kruidenrand, *S* is het subsidiebedrag per strekkende meter gras-kruidenrand en *D* is het bedrag aan winstderving per hectare. Alle bedragen zijn in euro.

Bas Nederlof, ook een boer in de Hoeksche Waard, heeft in 2013 een gras-kruidenrand van 2100 meter aangelegd. De winstderving was 500 euro per hectare.

3p **2** Bereken de nettowinst die hij op deze akkerrand gemaakt heeft.

Boeren leggen het liefst akkerranden aan op slechte landbouwgrond of op grond die lastig te bewerken is. Op goede landbouwgrond is de winst door het telen van een gewas namelijk vaak hoger dan de nettowinst op een akkerrand.
In 2013 leverde een gewas op goede landbouwgrond gemiddeld 1025 euro per hectare winst op. Als een boer op deze grond een akkerrand zou aanleggen, zou de winstderving dus 1025 euro per hectare zijn. Een boer kon daarom in 2013, alleen als hij een hoger subsidiebedrag per strekkende meter kreeg, zonder verlies een akkerrand op goede landbouwgrond aanleggen.

4p **3** Bereken met behulp van de formule het minimale subsidiebedrag per strekkende meter waarbij een gras-kruidenrand op goede landbouwgrond in 2013 zonder verlies kon worden aangelegd. Geef je antwoord in hele centen.

In een situatie waarin er geen nettowinst of -verlies gemaakt wordt, dus als $W = 0$, kan er uitgaande van de gegeven formule door herleiding een verband opgesteld worden tussen *S* en *D*. Dit verband heeft de vorm
$S = a \cdot D + b$, waarbij *a* en *b* getallen zijn.

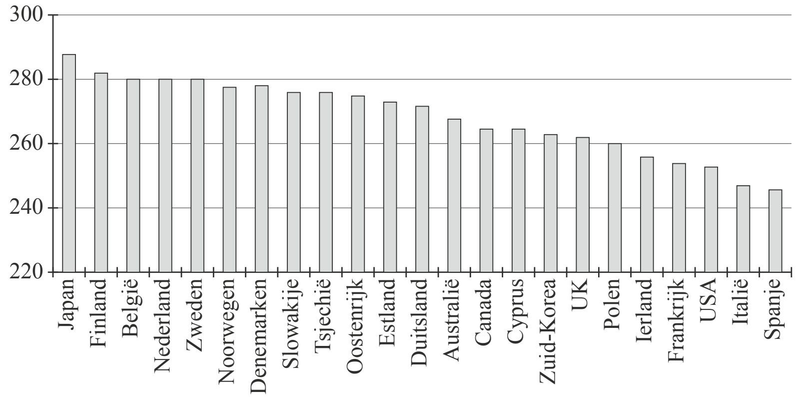
3p **4** Voer deze herleiding uit en geef daarbij de niet-afgeronde waarden van *a* en *b*.

Onderzoek naar rekenvaardigheid

De OESO (Organisatie voor Economische Samenwerking en Ontwikkeling) publiceerde in oktober 2013 de resultaten van het onderzoek PIAAC (Programme for the International Assessment of Adult Competencies). Dit is een onderzoek naar reken-, taal- en probleemoplossingsvaardigheden in 23 landen onder ruim 5000 16- tot 65-jarigen per land.
Deze opgave gaat alleen over de score op rekenvaardigheid. Deze score heeft een schaal van 0 tot 500.

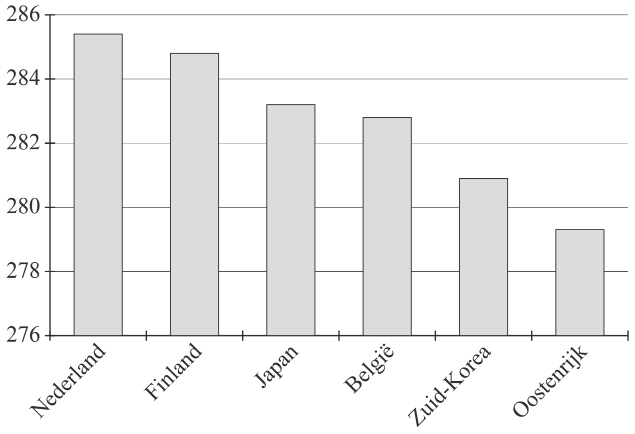
Voor ieder land is op basis van het onderzoek een schatting gemaakt voor de gemiddelde score van de gehele populatie van 16- tot 65-jarigen. In figuur 1 zie je deze gemiddelde scores per land. Nederland staat op de vierde plaats.

figuur 1 **Gemiddelde score op rekenvaardigheid, 16-65 jaar**



Ook voor de deelpopulatie van 16- tot 24-jarigen zijn de gemiddelde scores per land bepaald. Nederland staat hier op de eerste plaats. In figuur 2 zie je de gemiddelde scores van de top 6. Zweden behoort niet tot de top 6.

figuur 2 **Gemiddelde score op rekenvaardigheid, 16-24 jaar**



Als je de figuren 1 en 2 met elkaar vergelijkt, zijn er verschillende conclusies mogelijk. Hieronder staan twee mogelijke conclusies.

- In Nederland scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld hoger dan de 25- tot 65-jarigen.
- In Zweden scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld lager dan de 25- tot 65-jarigen.

4p **5** Leg bij elk van deze conclusies uit of deze juist is en of deze kan worden getrokken op basis van het vergelijken van de figuren 1 en 2.

In de tabel staan de **percentielen** van de scores van enkele deelnemende landen. Je kunt bijvoorbeeld aflezen dat het 75e percentiel van Australië 305,4 is. Dit betekent dat 75% van de Australische deelnemers een score van 305,4 of lager had.

tabel

land	gemiddelde score	standaard-afwijking	percentiel						
			5	10	25	50	75	90	95
Australië	267,6	56,6	169,3	197,7	234,7	271,9	305,4	334,3	351,6
Canada	265,5	55,5	169,2	194,2	230,8	269,8	303,9	332,4	349,3
Finland	282,2	52,2	193,6	217,4	250,8	285,8	317,3	345,0	360,8
Frankrijk	254,2	56,2	152,1	179,7	219,9	259,2	293,9	321,5	336,5
Duitsland	271,7	53,1	179,0	201,9	238,4	275,9	309,3	335,0	350,5
Italië	247,1	50,0	161,1	182,9	215,4	249,3	281,9	309,1	324,1
Japan	288,2	44,0	212,6	231,7	260,7	290,8	318,1	341,7	355,4
Nederland	280,3	51,1	188,6	214,6	251,0	285,8	315,3	339,7	354,2
Spanje	245,8	51,3	149,1	177,8	216,3	250,3	280,9	307,4	322,3
Zweden	279,1	54,9	181,7	209,9	249,2	284,0	316,0	342,8	358,4
USA	252,8	57,0	151,7	177,9	217,1	256,1	293,1	322,7	340,0
alle deelnemers van de 23 landen	268,7	51,3	178,4	202,8	237,9	272,5	303,9	330,3	345,6

Een van de onderzoekers concludeert op basis van de laatste regel van de tabel dat de score van alle deelnemers niet normaal verdeeld is.

2p **6** Geef een mogelijke statistische redenering die deze onderzoeker hiervoor gebruikt kan hebben.

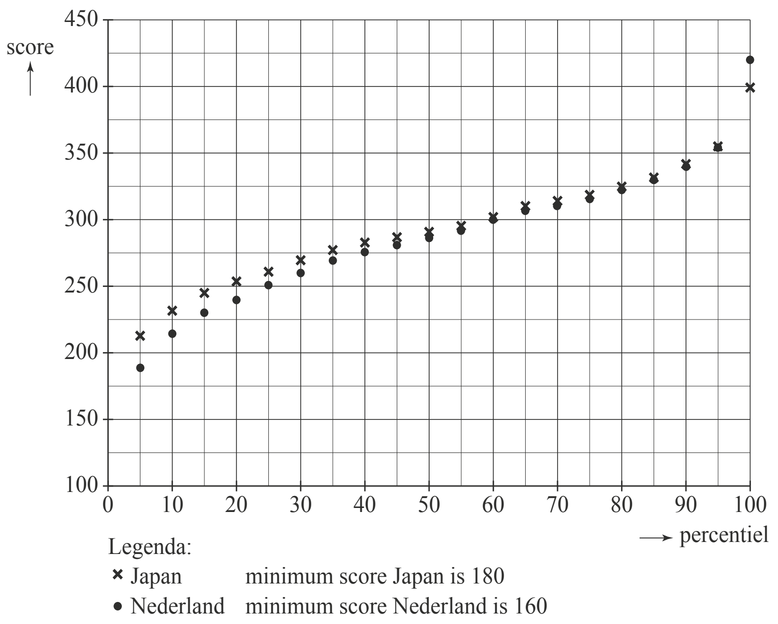
6p **7** Bepaal met behulp van het formuleblad op twee verschillende manieren of het verschil tussen de scores die behaald zijn door de Canadese deelnemers en de scores die behaald zijn door de Spaanse deelnemers groot, middelmatig of gering is.

Er zijn verschillende manieren om met behulp van de tabel de spreiding van de scores tussen landen te vergelijken.

3p **8** Kies twee verschillende spreidingsmaten en vergelijk met elk van deze maten de spreiding van de scores in Australië en Spanje.

In figuur 3 zijn de percentielscores van Japan en Nederland in een grafiek weergegeven.

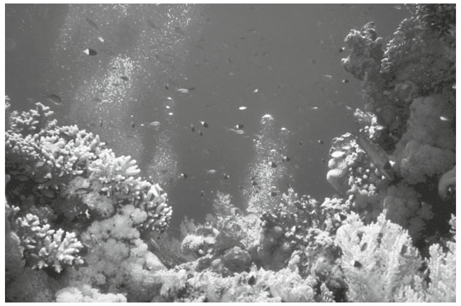
figuur 3



De grafiek van Japan verschilt van de grafiek van Nederland.

3p **9** Beredeneer met behulp van figuur 3 of de spreiding van de scores in Japan groter of kleiner is dan die in Nederland.

Great Barrier Reef



Het Great Barrier Reef voor de kust van Australië is het grootste en bekendste koraalrif ter wereld.
De totale oppervlakte van het rif is 345 000 km^2. Helaas is in de periode 1985-2012 veel koraal op het rif verdwenen, zo blijkt uit een Australische studie.

In 1985 was nog 97 000 km^2 van het rif bedekt met koraal. In 2012 was deze oppervlakte afgenomen tot nog slechts 13,8% van het rifoppervlak.

Je kunt berekenen dat de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt was in de periode 1985-2012 met ruim 50% is afgenomen.

3p **10** Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig.

De onderzoekers waarschuwden in 2012 dat er nog meer koraal zou verdwijnen. Zij verwachtten dat als er niet zou worden ingegrepen, de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt is in de periode 2012-2022 opnieuw zou halveren.
Neem aan dat deze afname vanaf 2012 exponentieel zou zijn.

4p **11** Bereken met hoeveel procent de oppervlakte van het rif dat met koraal bedekt is dan jaarlijks zou afnemen. Geef je antwoord in hele procenten.

De belangrijkste bedreigingen voor het koraal komen van tropische stormen en de doornenkroon, een grote zeester.
Als er geen doornenkronen zouden zijn en als we aannemen dat de schade door tropische stormen ongeveer gelijk blijft, zou het aantal km^2 rif dat met koraal bedekt is met 0,89% per jaar kunnen toenemen.

4p **12** Bereken hoeveel jaar het dan zou duren totdat het aantal km^2 rif dat met koraal bedekt is, voor het eerst weer met 50% zou zijn toegenomen.

Studieschuld

Studeren kost geld. In het verleden gaf de overheid daarom aan de meeste studenten financiële ondersteuning in de vorm van een beurs.
Studenten met een beurs kregen elke maand een bepaald geldbedrag op hun bankrekening gestort.

Een student die tussen 1996 en 2014 begon met studeren, kreeg de zogenoemde prestatiebeurs, een beurs in de vorm van een lening waarover rente berekend werd. Door het ontvangen van de prestatiebeurs bouwde een student dus een studieschuld op.
Deze studieschuld werd echter kwijtgescholden als de student binnen 10 jaar een diploma haalde.
Een student die het diploma niet op tijd haalde of stopte met studeren, moest zijn studieschuld, inclusief alle rente, terugbetalen.

In 2012 bedroeg de prestatiebeurs voor een uitwonende student € 266,23 per maand. Daarover werd elke maand rente berekend, zodanig dat het jaarlijkse rentepercentage 1,39% was.

4p **13** Bereken het maandelijkse rentepercentage in drie decimalen nauwkeurig.

In deze opgave gaan we ervan uit dat het geldbedrag per maand en het jaarlijkse rentepercentage door de jaren heen niet veranderen.

Andries begon in september 2012 met zijn studie en kon studeren met een prestatiebeurs. Hij kreeg die maand voor de eerste keer € 266,23 op zijn bankrekening gestort.
Om te berekenen hoe hoog zijn studieschuld S in euro in de loop van de tijd was geworden, gebruikte Andries de formule:

$$S = -231\,299,46 + 231565,69 \cdot 1,001151^t$$

Hierin is t het aantal maanden na de ontvangst van de eerste storting.

4p **14** Bereken in welke maand van welk jaar de studieschuld van Andries voor het eerst hoger was dan € 5000,-.

Als een student binnen 10 jaar geen diploma haalde, moest hij de opgebouwde studieschuld, inclusief rente, terugbetalen. Het was verplicht elke maand een bedrag van minstens € 45,41 terug te betalen. De schuld die dan na elke maandelijkse terugbetaling overbleef, werd de restschuld genoemd. De restschuld werd dus elke maand lager.

Op de uitwerkbijlage staat een tabel met daarin de restschulden bij een maandelijkse terugbetaling van € 45,41 voor verschillende studieschulden en verschillende maanden na de eerste terugbetaling.

Maaike had een studieschuld. Ze betaalde € 45,41 per maand terug. Ze had er meer dan 11 jaar, maar minder dan 12 jaar voor nodig om de totale studieschuld terug te betalen.

2p **15** Bepaal met de tabel een mogelijke waarde van haar studieschuld.

Door omstandigheden moest Andries zijn studie voortijdig afbreken. Hij had toen een studieschuld opgebouwd van € 6200,- die hij helemaal moest terugbetalen. Hij begon in september 2014 met het terugbetalen van de verplichte € 45,41 per maand.

4p **16** Bereken met behulp van lineair interpoleren hoe groot de restschuld van Andries 60 maanden na de eerste terugbetaling is.

Papierformaten

Het bekendste papierformaat is het A4'tje, een vel papier dat in grote delen van de wereld als standaardpapierformaat gebruikt wordt. Het A4'tje komt uit een serie die begint met A0, een vel papier met een oppervlakte van precies 1 m^2. Van elk volgend formaat in de A-serie is de oppervlakte telkens tweemaal zo klein. In de praktijk zijn voornamelijk de formaten A0 tot en met A11 in gebruik.
De afmetingen van de eerste vijf formaten staan in de tabel. Hierin zijn de hoogte en breedte afgerond op hele cm.

tabel

formaat	formaat-nummer *n*	oppervlakte (mm^2)	hoogte *h* (cm)	breedte *b* (cm)
A0	0	1 000 000	119	84
A1	1	500 000	84	59
A2	2	250 000	59	42
A3	3	125 000	42	30
A4	4	62 500	30	21
…	…	…	…	…

Een formaat dat vaak gebruikt wordt voor postzegels is het A11-formaat.

3p **17** Bereken de oppervlakte van een A11-postzegel in hele mm^2.

Voor de hoogte *h* en voor de breedte *b* van een vel papier in de A-serie geldt:

$h = \sqrt{2} \cdot b$

In de tabel zijn zowel de hoogte als de breedte in hele cm gegeven. Maar met de bovenstaande formule kunnen bij een gegeven oppervlakte de hoogte en de breedte nauwkeuriger berekend worden. Er geldt:

$h \cdot b = \text{oppervlakte}$

De oppervlakte van een vel A6-papier is 15 625 mm^2.

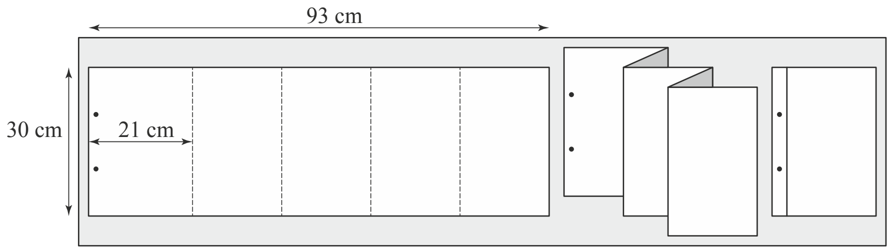
4p **18** Bereken met de bovenstaande formules de hoogte en de breedte van een vel A6-papier. Rond je antwoorden af op hele mm.

In theorie bestaat er een exponentieel verband tussen de hoogte *h* van een vel papier in de A-serie en het formaatnummer *n*. Door de afronding van *h* kunnen er kleine afwijkingen zijn.

3p **19** Toon met behulp van alle waarden van *h* uit de tabel aan dat er bij benadering een exponentieel verband bestaat tussen de hoogte *h* van een vel papier in de A-serie en het formaatnummer *n*.

Technisch tekenaars gebruiken papier uit de Z-serie. De hoogte van een vel uit de Z-serie is altijd gelijk aan 30 cm. Een vel Z1-papier, met formaatnummer 1, is gelijk aan een A4'tje.
Bij elk volgend formaat in de Z-serie wordt de breedte telkens met een vast aantal cm vermeerderd. Dit vaste aantal cm is kleiner dan 21 cm en is zo gekozen dat een vel papier uit de Z-serie zigzag gevouwen in een ordner voor A4-papier past. In de figuur is een voorbeeld gegeven van technisch tekenpapier in Z5-formaat. Het vel Z5-papier, met formaatnummer $n = 5$, heeft een breedte van 93 cm.

figuur **Z5-papier**



2p **20** Bereken de breedte van Z6-papier.

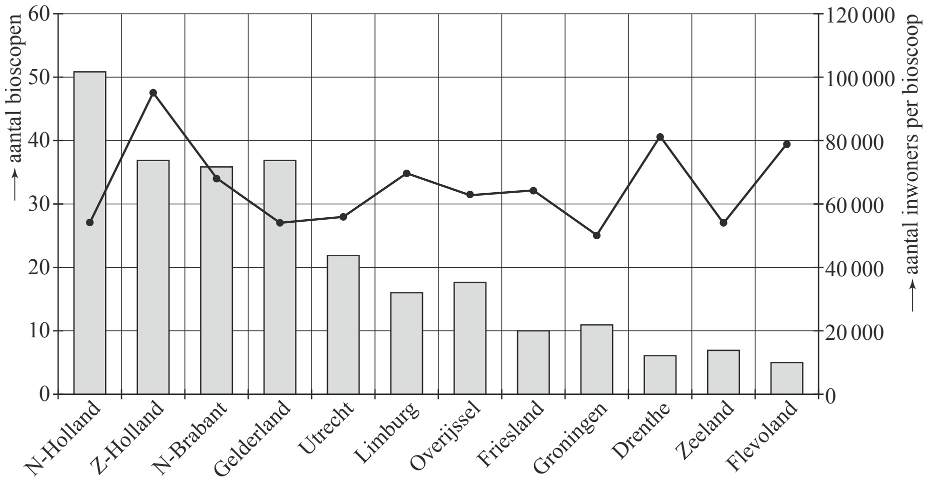
Je kunt een formule opstellen voor de oppervlakte van een vel papier uit de Z-serie met formaatnummer *n*.
Deze formule is te schrijven in de vorm $O = a \cdot n + b$.
Hierin is *O* de oppervlakte in cm^2 en zijn *a* en *b* getallen.

4p **21** Bereken de waarden van *a* en *b*.

Bioscoopbezoek

In de figuur staan gegevens over bioscopen in Nederland in 2012.

figuur



Het staafdiagram geeft het aantal bioscopen per provincie weer (linker verticale as). Het lijndiagram toont het aantal inwoners per bioscoop uitgesplitst per provincie (rechter verticale as).

In de tabel staat per provincie het aantal bioscoopbezoeken in 2012.

tabel

provincie	bezoeken
N-Holland	7 532 000
Z-Holland	7 298 000
N-Brabant	4 366 000
Gelderland	2 695 000

provincie	bezoeken
Utrecht	2 009 000
Overijssel	1 663 000
Limburg	1 662 000
Groningen	1 180 000

provincie	bezoeken
Friesland	625 000
Flevoland	525 000
Drenthe	519 000
Zeeland	486 000

Kees beweert: "In de provincie met de meeste bioscopen per inwoner is het gemiddeld aantal bioscoopbezoeken per inwoner meer dan 2."

7p **22** Onderzoek over welke provincie Kees het heeft en bereken voor deze provincie of hij gelijk heeft.

Uitwerkbijlage bij de vragen 15 en 16

15, 16

restschuld (afgerond op hele euro's) bij een maandelijkse terugbetaling van € 45,41

maanden na moment van eerste terugbetaling	oorspronkelijke studieschuld 500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000	7500	8000	8500	9000	9500	10 000
0	455	955	1455	1955	2455	2955	3455	3955	4455	4955	5455	5955	6455	6955	7455	7955	8455	8955	9455	9955
12	0	419	926	1433	1940	2447	2954	3461	3968	4475	4982	5489	5996	6503	7010	7517	8024	8531	9038	9545
24	0	0	391	905	1419	1933	2447	2961	3475	3989	4503	5017	5531	6045	6559	7073	7587	8101	8615	9129
36	0	0	0	369	890	1411	1933	2454	2975	3496	4017	4538	5059	5581	6102	6623	7144	7665	8186	8707
48	0	0	0	0	354	883	1411	1939	2468	2996	3525	4053	4581	5110	5638	6166	6695	7223	7752	8280
60	0	0	0	0	0	347	882	1418	1954	2489	3025	3561	4097	4632	5168	5704	6240	6775	7311	7847
72	0	0	0	0	0	0	346	889	1432	1976	2519	3062	3605	4148	4692	5235	5778	6321	6864	7407
84	0	0	0	0	0	0	0	353	904	1455	2005	2556	3107	3658	4208	4759	5310	5861	6411	6962
96	0	0	0	0	0	0	0	0	368	927	1485	2043	2602	3160	3718	4277	4835	5394	5952	6510
108	0	0	0	0	0	0	0	0	0	391	957	1523	2089	2656	3222	3788	4354	4920	5486	6052
120	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	422	996	1570	2144	2718	3292	3866	4440	5014	5588
132	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	462	1044	1626	2208	2790	3372	3954	4536	5118
144	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	510	1100	1690	2280	2870	3460	4050	4640
156	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	567	1165	1763	2362	2960	3558	4156
168	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	26	633	1239	1846	2453	3059	3666
180	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	93	709	1323	1938	2553	3168

Hints bij examen 2017-I

1 Bereken de kosten voor grondbewerking, onderhoud en management met behulp van de tabel en bereken het subsidiebedrag.

2 *W* is de nettowinst per 100 meter. Bereken eerst *W* met behulp van de gegevens.

3 Het minimale subsidiebedrag *S* per strekkende meter wordt gevraagd. Er is geen verlies, wat betekent dit voor *W* ?

4 $W = 0$ invullen in de formule. Herschrijf daarna de formule tot de gevraagde vorm.

5 Vergelijk de gemiddelde scores voor de leeftijd 16-24 (tabel 2) met die van de leeftijd 16-65 (tabel 1).

6 Het is voldoende om één argument te bedenken.

7 Het gaat om het vergelijken van twee groepen. Gebruik het formuleblad bij je examen en bekijk welke twee manieren je kunt gebruiken met de gegevens die bekend zijn.

8 De spreidingsmaten die je kunt vergelijken zijn de standaardafwijking en de interkwartielafstand (afstand tussen derde kwartiel en eerste kwartiel).

9 De spreidingsmaten die je kunt vergelijken zijn de variatiebreedte (het verschil tussen hoogste en laagste waarde en de interkwartielafstand (afstand tussen derde kwartiel en eerste kwartiel).

10 Denk aan $\frac{\text{oud} - \text{nieuw}}{\text{oud}} \cdot 100\%$.

11 Exponentiële groei. Bereken eerst de groeifactor.

12 0,89% toename, dus de groeifactor is .... Bedenk daarna welke vergelijking moet worden opgelost als er een totale toename is van 50%.

13 Het groeipercentage per maand wordt gevraagd. Bereken eerst de groeifactor per maand.

14 Bedenk welke vergelijking moet worden opgelost. Bereken, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden. Gebruik de grafiek of de tabel.

15 Na 11 jaar heeft ze nog een schuld en na 12 jaar niet meer. Zoek deze gegevens op in de tabel.

16 Lineair interpoleren. Gebruik de tabel en twee waarden in de buurt van een oorspronkelijke studieschuld van 6200 euro en de restschuld na 60 maanden.

17 Let op de eenheden m^2 en mm^2. De oppervlakte wordt 11 keer gehalveerd.

18 Combineer de twee formules en de gegeven oppervlakte. Denk aan substitutie.

19 Exponentieel verband, dus de quotiënten zijn gelijk.

20 De breedte van Z1-papier is gelijk aan A4. De breedte wordt steeds met een vast aantal cm vermeerderd, dus er is een lineair verband.

21 Er is een lineair verband. Bepaal met behulp van twee punten (*n*, oppervlakte) de vergelijking.

22 Verdeel de vraag in deelvragen en bedenk eerst welke gegevens je nodig hebt om je deelvraag te beantwoorden.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2017-I

Akkerranden

4p **1** *Een boer in de Hoeksche Waard legt een bloemenrand aan. Combineer de tabel (bloemenrand) en de opsomming van regels.*
De akkerrand is 3,5 meter breed en 2500 meter lang.
Oppervlakte akkerrand $= 3{,}5 \cdot 2500 = 8750\ m^2 = \frac{8750}{10\,000} = 0{,}875$ hectare. [1p]
De kosten voor zaaien en zaaizaad worden vergoed.
De kosten voor grondbewerking, onderhoud en management worden niet vergoed.
De niet vergoede kosten zijn 250 + 475 + 150 = 875 euro per hectare. [1p]
De totale niet vergoede kosten zijn $875 \cdot 0{,}875 = 765{,}63$ euro. [1p]
Het subsidiebedrag $= 0{,}63 \cdot 2500 = 1575$ euro. [1p]
Conclusie: het subsidiebedrag is hoger dan de kosten voor grondbewerking, onderhoud en management.

3p **2** *De akkerrand is 2100 meter en de winstderving is 500 euro per hectare, gevraagd wordt de nettowinst.*
$W = 100 \cdot S - 0{,}035 \cdot D - 21{,}455$ met *W* is nettowinst per 100 meter, *S* is subsidiebedrag per strekkende meter en *D* is bedrag aan winstderving per hectare.
Gegeven zijn $D = 500$ en $S = 0{,}53$, dus $W = 100 \cdot 0{,}53 - 0{,}035 \cdot 500 - 21{,}455 = 14{,}045$. [1p]
$W = 14{,}045$ per 100 meter en de akkerrand is 2100 meter. [1p]
Conclusie: de nettowinst $= 21 \cdot 14{,}045 = 294{,}95$ euro. [1p]

4p **3** *De gemiddelde winst op goede landbouwgrond is 1025 euro per hectare. Gevraagd wordt naar minimale subsidiebedrag S.*

eerste manier:
De winstderving $D = 1025$ per hectare. Er is geen winst en geen verlies als $W = 0$.
Dus $0 = 100 \cdot S - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455$ oplossen. [1p]
$100 \cdot S = 0{,}035 \cdot 1025 + 21{,}455 = 57{,}33$ dus $S = 0{,}5733$ [2p]
Conclusie: het minimale subsidiebedrag is € 0,58, oftewel 58 cent per strekkende meter. [1p]
De vergelijking $0 = 100 \cdot S - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455$ *mag ook met de grafische rekenmachine worden opgelost.*

tweede manier:
Als $S = 0{,}53$ en de winstderving $D = 1025$ per hectare geldt
$W = 100 \cdot 0{,}53 - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455 = -4{,}33$ [1p]
Voor $S = 0{,}53$ is er verlies. Vul voor *S* verschillende waarden in (zie tabel onder) en bekijk vanaf welke waarde van *S*, *W* positief is. [2p]

$S = 0{,}53$ en $D = 1025$	$W = 100 \cdot 0{,}53 - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455 = -4{,}33$
$S = 0{,}56$ en $D = 1025$	$W = 100 \cdot 0{,}56 - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455 = -1{,}019$
$S = 0{,}57$ en $D = 1025$	$W = 100 \cdot 0{,}57 - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455 = -0{,}019$
$S = 0{,}58$ en $D = 1025$	$W = 100 \cdot 0{,}58 - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455 = 0{,}981$
$S = 0{,}59$ en $D = 1025$	$W = 100 \cdot 0{,}59 - 0{,}035 \cdot 1025 - 21{,}455 = 1{,}981$

Conclusie: het minimale subsidiebedrag is € 0,58, oftewel 58 cent per strekkende meter. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

3p **4** *W = 0 is gegeven. Herschrijf de formule.*
$W = 100 \cdot S - 0{,}035 \cdot D - 21{,}455$ en $W = 0$ geeft $0 = 100 \cdot S - 0{,}035 \cdot D - 21{,}455$ [1p] dus $100 \cdot S = 0{,}035 \cdot D + 21{,}455$ [1p] dus $S = 0{,}00035 \cdot D + 0{,}21455$ [1p]
Conclusie: $a = 0{,}00035$ en $b = 0{,}21455$

Onderzoek naar rekenvaardigheid

4p **5** *Het gaat om het vergelijken van de gemiddelde score voor de 16- tot 24-jarigen en die van 25- tot 65-jarigen.*
Eerste conclusie: in Nederland scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld hoger dan de 25- tot 65-jarigen.
Uit figuur 1 volgt dat de gemiddelde score van de 16-65-jarigen in Nederland 280 is. Uit figuur 2 volgt dat de gemiddelde score van de 16-24-jarigen in Nederland iets meer dan 285 is. Dit betekent dat de groep 16-24-jarigen gemiddeld hoger gescoord heeft. [1p] Dus de eerste conclusie is juist. [1p]
Tweede conclusie: in Zweden scoren de 16- tot 24-jarigen gemiddeld lager dan de 25- tot 65-jarigen.
Uit figuur 1 volgt dat de gemiddelde score van de 16-65-jarigen in Zweden 280 is. Uit figuur 2 volgt dat de gemiddelde score van de 16-24-jarigen in Zweden lager of gelijk is aan de score van Oostenrijk, dus de score van Zweden is hoogstens 279,4 is. Dit betekent dat de groep 16-24-jarigen gemiddeld lager gescoord heeft. [1p] Dus de tweede conclusie is juist. [1p]

2p **6** *Het is voldoende om één tegenargument te geven als er geen sprake is van de normale verdeling.*
Het noemen van één van onderstaande redeneringen is voldoende.
- Bij een normale verdeling geldt: gemiddelde = mediaan.
  Laatste regel: het gemiddelde = 268,7 is niet gelijk aan de mediaan = 272,5
  Het gemiddelde is niet gelijk aan de mediaan, dus de verdeling is niet symmetrisch. [2p]

of
- Bij een normale verdeling geldt: de verdeling is symmetrisch.
  50% percentiel = 272,5
  De afstand tussen 25 en 50 percentiel is 272,5 – 237,9 = 34,6
  De afstand tussen 75 en 50 percentiel is 303,9 – 272,5 = 31,4
  Deze afstanden zijn niet gelijk, dus de verdeling is niet symmetrisch. [2p]

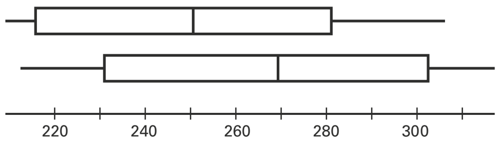
6p **7** *Het gaat om het vergelijken van twee groepen, bekijk welke gegevens bekend zijn en welke manieren je kunt gebruiken van je formuleblad.*
Bekend zijn de gegevens

land	gemiddelde	standaardafwijking	Q_1	mediaan	Q_3
Canada	$265{,}5 = \overline{X}_1$	$55{,}5 = S_1$	230,8	269,8	303,9
Spanje	$245{,}8 = \overline{X}_2$	$51{,}3 = S_2$	216,3	250,3	280,9

Met behulp van deze gegevens kan de formule voor de effectgrootte E gebruikt worden of de methode om twee boxplots te vergelijken. [1p]

Effectgrootte E
De effectgrootte $E = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)} = \dfrac{265{,}5 - 245{,}8}{\frac{1}{2}(55{,}5 + 51{,}3)} \approx 0{,}37$ [1p]
$0{,}37 \leq 0{,}4$ (zie formuleblad), dus het verschil is gering. [1p]

Twee boxplots vergelijken.
Bovenstaande gegevens verwerkt in een boxplot [2p] geeft:



De boxen overlappen en de mediaan van elke boxplot ligt binnen de box van de andere boxplot, dus het verschil is gering (zie formuleblad). [1p]

3p **8** *Spreidingsmaten die gebruikt kunnen worden zijn de standaardafwijking en de afstand tussen het eerste en derde kwartiel (interkwartielafstand).*
Bekend zijn de gegevens

land	standaardafwijking	Q_1	Q_3
Australië	56,6	234,7	305,4
Spanje	51,3	216,3	280,9

De standaardafwijking van Australië is groter dan de standaardafwijking van Spanje, dus volgens deze gegevens is de spreiding in Australië groter dan die van Spanje. [1p]
De interkwartielafstand voor Australië is $IQR = 305{,}4 - 234{,}7 = 70{,}7$ en voor Spanje $IQR = 280{,}9 - 216{,}3 = 64{,}6$. [1p]
De interkwartielafstand voor Australië is groter, dus de spreiding van Australië is groter dan die van Spanje. [1p]

3p **9** *Spreidingsmaten die gebruikt kunnen worden zijn de afstand tussen het eerste en derde kwartiel (interkwartielafstand) en de afstand tussen de hoogste en laagste waarde (variatiebreedte).*
Uit figuur 3 zijn bij benadering de volgende gegevens af te lezen:

land	kleinste waarde	Q_1	Q_3	hoogste waarde
Japan	180	260	320	400
Nederland	160	250	315	420

De variatiebreedte voor Japan is 400 – 180 = 220.
De variatiebreedte voor Nederland is 420 – 160 = 260.
De interkwartielafstand voor Japan is 320 – 260 = 60.
De interkwartielafstand voor Nederland is 315 – 250 = 65.
Het verschil tussen hoogste en laagste waarde (variatiebreedte) is voor Nederland groter dan voor Japan en de interkwartielafstand is voor Nederland groter dan voor Japan. [2p]
Conclusie: de spreiding in Japan is kleiner dan de spreiding in Nederland. [1p]

Great Barrier Reef

3p **10** *Gevraagd wordt naar het afnamepercentage van de oppervlakte die met koraal bedekt was.*

eerste manier, bepaal van beide jaren de bedekte oppervlakte:
De totale oppervlakte van het rif is 345 000 km^2.
In 1985 was 97 000 km^2 met koraal bedekt.
In 2012 was 13,8% van de rifoppervlakte bedekt, dit is $0{,}138 \cdot 345\,000 = 47\,610$ km^2. [1p]

Er is een afname van $\frac{97\,000 - 47\,610}{97\,000} \cdot 100 \approx 50{,}9175\ldots$, oftewel een afname van 50,9%. [2p]

tweede manier, bepaal van beide jaren het percentage van de bedekte oppervlakte:
In 1985 was 97 000 km^2 met koraal bedekt.

De totale oppervlakte van het rif is 345 000 km^2. Dit is $\frac{97\,000}{345\,000} \cdot 100 \approx 28{,}11594\ldots\%$. [1p]
In 2012 was 13,8% van de rifoppervlakte bedekt.

Er is een afname van $\frac{28{,}11594 - 13{,}8}{28{,}11594} \cdot 100 \approx 50{,}9175\ldots$ oftewel een afname van 50,9%. [2p]

4p **11** *Exponentiële afname, dus bereken eerst de groeifactor.*
Halvering in de periode van 2012-2022. Dus de groeifactor per 10 jaar is 0,5. [1p]

De groeifactor per jaar is $0{,}5^{\frac{1}{10}} = 0{,}9330\ldots \approx 0{,}93$, [2p] dus er is een afname van ongeveer 7% per jaar. [1p]

4p **12** *Exponentiële toename met 50%.*
0,89% toename per jaar, dus de groeifactor per jaar is 1,0089. [1p]
Er is 50% toename als $1{,}0089^t = 1{,}5$. [1p]
De vergelijking bijvoorbeeld oplossen met de grafische rekenmachine.
Voer in $y_1 = 1{,}0089^x$ en $y_2 = 1{,}5$ met WINDOW bijv $[0, 75] \times [0, 3]$
Intersect geeft ongeveer 45,76 jaar. [1p]
Conclusie: na 46 jaar is de hoeveelheid met 50% toegenomen. [1p]
Opmerking: ook bijvoorbeeld het antwoord 45,8 jaar of 45,9 jaar wordt goed gerekend. Het eindantwoord moet wel naar boven worden afgerond.

Studieschuld

4p **13** Het jaarlijkse rentepercentage is 1,39%, dus de groeifactor per jaar is 1,0139. [1p]

De groeifactor per maand is $1{,}0139^{\frac{1}{12}} \approx 1{,}00115$ [2p] dus het rentepercentage is ongeveer 0,115%. [1p]

4p **14** $S = -231\,299{,}46 + 231\,565{,}69 \cdot 1{,}001151^t$ *met t het aantal maanden na ontvangst eerste storting en S zijn studieschuld.*

eerste manier, met de tabel:
De vergelijking $S = -231\,299{,}46 + 231\,565{,}69 \cdot 1{,}001151^t = 5000$ moet worden opgelost. [1p]
Voer in $y_1 = -231\,299{,}46 + 231\,565{,}69 \cdot 1{,}001151^x$. Met de tabel [1p] vind je

x	15	16	17	18	19
y_1	4296,6	4567,8	4839,2	5111	5383,1

Na 18 maanden is zijn studieschuld voor het eerst meer dan 5000 euro. [1p]
$t = 0$ is september 2012, dus $t = 12$ is september 2013 en $t = 18$ is maart 2014.
Conclusie: in maart 2014 was de studieschuld voor het eerst hoger dan € 5000. [1p]

tweede manier, met de grafiek:
De vergelijking $S = -231299{,}46 + 231565{,}69 \cdot 1{,}001151^t = 5000$ moet worden opgelost. [1p]
Voer in $y_1 = -231299{,}46 + 231565{,}69 \cdot 1{,}001151^x$ en $y_2 = 5000$
WINDOW bijv $[0, 25] \times [0, 6000]$
Intersect geeft ongeveer 17,59 maanden, [1p] dus na 18 maanden is zijn studieschuld voor het eerst meer dan 5000 euro. [1p] $t = 0$ is september 2012, dus $t = 12$ is september 2013 en $t = 18$ is maart 2014.
Conclusie: in maart 2014 was de studieschuld voor het eerst hoger dan € 5000. [1p]

2p **15** *In de tabel zijn alleen waarden af te lezen per heel jaar (per 12 maanden).*
Na 11 jaar, dus na $11 \cdot 12 = 132$ maanden heeft zij nog een restschuld.
Na 12 jaar, dus na $12 \cdot 12 = 144$ maanden is haar restschuld gelijk aan 0. [1p]
Kijk in de tabel bij de horizontale rij bij 144 maanden en bij 132 maanden.
In de tabel is nu af te lezen dat een mogelijke waarde van haar oorspronkelijke studieschuld 6000 euro was. [1p]

4p **16** *Lineair interpoleren, neem twee punten in de buurt van de studieschuld 6200. Gebruik de tabel.*
Andries zijn studieschuld was € 6200. Hij begint in september 2014 met terugbetalen.
Hij betaalt per maand € 45,41.
In de tabel is af te lezen dat na 60 maanden de studieschuld bij

- een oorspronkelijke studieschuld van 6000 euro nog € 3561 is
- een oorspronkelijke studieschuld van 6500 euro nog € 4097 is

Toename oorspronkelijke studieschuld met	Toename studieschuld na 60 maanden
500 (= 6500 – 6000)	4097 – 3561 = 536 [1p]
100 (= 500 : 5)	536 : 5 = 107,20 [1p]
200	107,20 · 2 = 214,40 [1p]

Dus als de oorspronkelijke studieschuld toeneemt met 200 (van 6000 naar 6200), dan neemt de studieschuld toe van 3561 naar 3561 + 214,40 = 3775,40 euro. [1p]

Papierformaten

3p **17** *Let op de eenheden.*
De oppervlakte van A0 wordt 11 keer gehalveerd. [1p]
De oppervlakte van A0 is 1 m^2 = 1000 000 mm^2.
Dus de oppervlakte van A11 is $1000\,000 \text{ mm}^2 \cdot (0{,}5)^{11}$ [1p] $= 488{,}28125 \text{ mm}^2 = 488 \text{ mm}^2$ [1p]

4p **18** De oppervlakte van A6-papier is 15 625 mm^2.

eerste manier, met behulp van substitutie:
$h \cdot b =$ oppervlakte dus $h \cdot b = 15\,625$.
$h = \sqrt{2} \cdot b$ invullen (substitueren) in $h \cdot b = 15\,625$ geeft $\sqrt{2} \cdot b \cdot b = 15\,625$, [1p] dus

$b^2 = \frac{15\,625}{\sqrt{2}} \approx 11\,048{,}54\ldots$, dus $b \approx \sqrt{11\,048{,}54\ldots} \approx 105{,}11$ [1p]

Invullen in $h = \sqrt{2} \cdot b$ geeft $h = \sqrt{2} \cdot 105{,}11 \approx 148{,}65$ [1p]
De berekeningen mogen ook met behulp van de grafische rekenmachine gemaakt worden (bijvoorbeeld met intersect).
Conclusie: de hoogte is 149 mm en de breedte is 105 mm. [1p]

tweede manier, met behulp van het snijpunt:

$h \cdot b$ = *oppervlakte* dus $h \cdot b = 15\,625$, dus $h = \frac{15\,625}{b}$ [1p]

$h = \sqrt{2} \cdot b$ [1p]
Bereken met behulp van de grafische rekenmachine.

Voer in $y_1 = \frac{15\,625}{x}$ en $y_2 = \sqrt{2} \cdot x$ en bepaal het snijpunt met behulp van de tabel of de grafiek en intersect. [1p]
WINDOW [50, 170] × [50, 300] en Intersect geeft $x = 105{,}11$ en $y = 148{,}65$.
Of met de tabel:

x	103	104	105	106
y_1	152	150	149	147
y_2	146	147	149	150

Conclusie: de hoogte is 149 mm en de breedte is 105 mm. [1p]

3p **19** *Toon aan met **alle** waarden uit de tabel. Er is een exponentieel verband als de quotiënten van twee opeenvolgende hoogtes een gelijke uitkomst geven.*

$\frac{84}{119} \approx 0{,}7$; $\frac{59}{84} \approx 0{,}7$; $\frac{42}{59} \approx 0{,}7$; $\frac{30}{42} \approx 0{,}7$ [2p]
Conclusie: de quotiënten zijn ongeveer gelijk, dus er is een exponentieel verband. [1p]

2p **20** *De breedte wordt steeds met een vast aantal cm vermeerderd, dus er is een lineair verband.*
Een vel Z1-papier, met $n = 1$, is gelijk een A4'tje, dus hoogte = 30 cm en breedte = 21 cm.
Een vel Z5-papier, met $n = 5$, heeft een hoogte = 30 cm en breedte = 93 cm.
Als n toeneemt van $n = 1$ naar $n = 5$ (dus als n met 4 toeneemt), neemt de breedte met 93 – 21 = 72 toe.

Dus als n met 1 toeneemt, dan neemt de breedte met $\frac{72}{4} = 18$ toe. [1p]

Z5-papier heeft een breedte van 93 cm, dus Z6-papier heeft een breedte van 93 + 18 = 111 cm. [1p]

4p **21** *Er is een lineair verband waarbij de oppervlakte wordt uitgedrukt in n.*

eerste manier, met behulp van twee punten:
Z1-papier heeft hoogte = 30 cm en breedte = 21 cm, dus oppervlakte = 30 · 21 = 630 cm^2
Z5-papier heeft hoogte = 30 cm en breedte = 93 cm, dus oppervlakte = 30 · 93 = 2790 cm^2 [1p]
Vergelijking $O = a{\cdot}n + b$ door (1, 630) en (5, 2790) opstellen

Richtingscoëfficiënt is $a = \frac{2790 - 630}{5 - 1} = 540$ [1p] dus $O = 540 \cdot n + b$

Punt (1, 630) invullen: $630 = 540 \cdot 1 + b$ dus $b = 630 - 540 = 90$ [1p]
Conclusie: $O = 540 \cdot n + 90$, dus $a = 540$ en $b = 90$ [1p]

tweede manier, met behulp van de formule voor de breedte en oppervlakte:
De formule voor de breedte is lineair: *breedte* = $r \cdot n + c$
De breedte wordt steeds met 18 vermeerderd als n met 1 toeneemt (zie onderdeel 20), dus $r = 18$. [1p]
Z1-papier heeft breedte = 21 cm, (1, 21) invullen in *breedte* = $18 \cdot n + c$
geeft $21 = 18 \cdot 1 + c$ dus $c = 3$
De formule voor de breedte is *breedte* = $18 \cdot n + 3$ [1p]
De hoogte = 30 cm
Oppervlakte = hoogte · breedte = $30 \cdot (18 \cdot n + 3) = 540 \cdot n + 90$ [1p]
Conclusie: $O = 540{\cdot}n + 90$, dus $a = 540$ en $b = 90$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Bioscoopbezoek

7p **22** *Het gaat om een onderzoek, maak eerst een stappenplan. Welke gegevens staan er in de vraag en noteer wat er gevraagd wordt.*
In de provincie met de meeste bioscopen per inwoner is het aantal bioscoopbezoeken per inwoner meer dan 2.
Deelvragen:
- Welke provincie heeft de meeste bioscopen per inwoner?
- Wat is in deze provincie het aantal bioscoopbezoeken per inwoner?

Welke provincie heeft de meeste bioscopen per inwoner?
Deze vraag is met behulp van de eerste figuur te beantwoorden. Het staafdiagram geeft het aantal bioscopen en het lijndiagram het aantal inwoners per bioscoop (rechter verticale as).
Bijvoorbeeld N-Holland heeft 51 bioscopen en ongeveer 55 000 inwoners per bioscoop.

55 000 inwoners per bioscoop, dus dat zijn $\frac{1}{55\,000} \approx 0{,}00001818$ *bioscopen per inwoner.*
Z-Holland heeft 95 000 inwoners per bioscoop, dus $\frac{1}{95\,000} \approx 0{,}000010526$ *bioscopen per inwoner.*
Hoe kleiner het aantal inwoners per bioscoop, hoe groter het aantal bioscopen per inwoner.
Groningen heeft 50 000 inwoners per bioscoop, dus $\frac{1}{50\,000} \approx 0{,}00002$ bioscopen per inwoner. [1p]
Dus Groningen heeft de meeste bioscopen per inwoner. [1p]

Wat is in deze provincie Groningen het aantal bioscoopbezoeken per inwoner?
oftewel gevraagd wordt naar
$\frac{\text{totaal aantal bioscoopbezoeken}}{\text{totaal aantal inwoners}}$ = gemiddeld aantal bioscoopbezoeken per inwoner [1p]

Gegevens uit de figuur voor Groningen
- het aantal bioscopen is 11 [1p]
- het aantal inwoners per bioscoop is ongeveer 50 000 [1p]

Dus het totaal aantal inwoners is ongeveer 11 · 50 000 = 550 000 [1p]
Gegevens uit de tabel voor Groningen
- het totaal aantal bioscoopbezoeken is 1180 000

Het gemiddeld aantal bezoeken per inwoner is dan ongeveer $\frac{1180\,000}{550\,000} \approx 2{,}1$

Conclusie: Kees heeft gelijk. [1p]

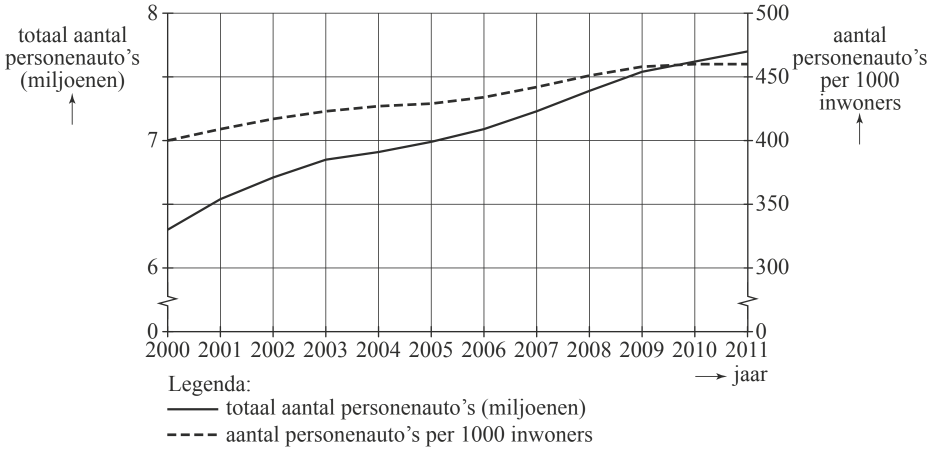
© ThiemeMeulenhoff

Examen 2017-II

Personenauto's in Nederland

Het aantal personenauto's in Nederland neemt elk jaar toe. In de figuur is de ontwikkeling te zien van het totaal aantal personenauto's (linker verticale as) en van het aantal personenauto's per 1000 inwoners (rechter verticale as) in Nederland van 2000 tot en met 2011. Deze aantallen zijn telkens op 1 januari van elk jaar vastgesteld.

figuur **ontwikkeling van het aantal personenauto's**



In de figuur kun je aflezen dat er op 1 januari 2005 ongeveer 7 miljoen personenauto's waren in Nederland en dat er op dat moment ongeveer 430 personenauto's per 1000 inwoners waren.

Van 1 januari 2000 tot 1 januari 2011 is het totaal aantal personenauto's toegenomen.

3p **1** Bereken met hoeveel procent dit aantal is toegenomen.

Ga ervan uit dat de gemiddelde jaarlijkse toename van het aantal personenauto's per 1000 inwoners in de periode 2000 – 2011 ook geldt voor de jaren na 2011.

4p **2** Bereken hiermee het aantal personenauto's per 1000 inwoners op 1 januari 2020.

Het delen van personenauto's wordt steeds populairder. Mensen kiezen er steeds vaker voor om een auto te delen om goedkoper uit te zijn of om het milieu te sparen. De groei van het aantal gedeelde auto's is spectaculair. Op 1 januari 2011 waren er 2100 gedeelde auto's op de weg. Een jaar later waren dat er al 2600. Ga ervan uit dat de groei exponentieel verloopt.

3p **3** Bereken hoeveel gedeelde auto's er dan op 1 januari 2018 zullen zijn. Rond je antwoord af op honderdtallen.

In de tabel staan gegevens over het aantal personenauto's in Nederland in de jaren 1990 en 2010. De gegevens zijn telkens vastgesteld op 1 januari.

tabel **aantal personenauto's in Nederland**

jaar	totaal aantal	aantal per 1000 inwoners
1990	5 118 429	344
2010	7 622 353	460

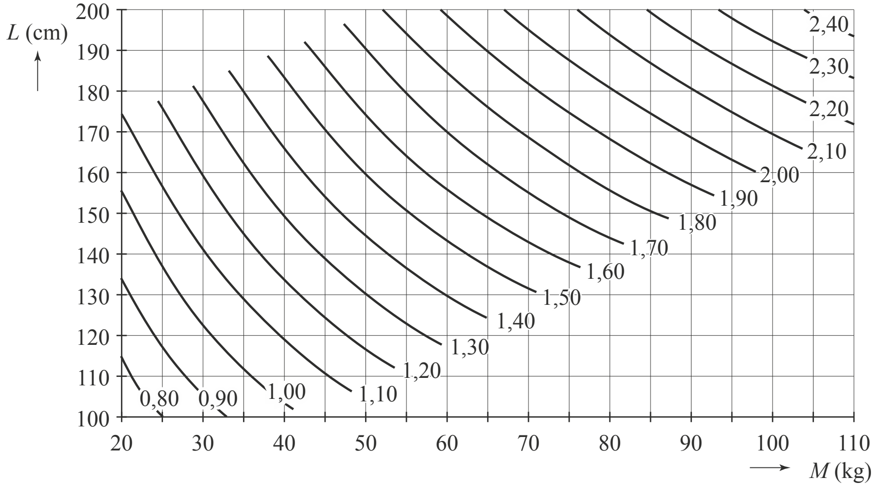
Het aantal inwoners van Nederland is in de loop der jaren toegenomen.

3p **4** Bereken met behulp van de tabel de toename van het aantal inwoners van Nederland in de periode van 1 januari 1990 tot 1 januari 2010. Rond je antwoord af op duizendtallen.

Lichaamsoppervlakte

Voor het bepalen van de dosering van sommige medicijnen is de lichaamsoppervlakte van de patiënt van belang. Op de afdeling hematologie van het VU medisch centrum in Amsterdam wordt de lichaamsoppervlakte bij gegeven lengte en gewicht bepaald met behulp van onderstaande figuur. Deze figuur staat vergroot op de uitwerkbijlage. In deze opgave is S de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

figuur **lichaamsoppervlakte S (m^2)**



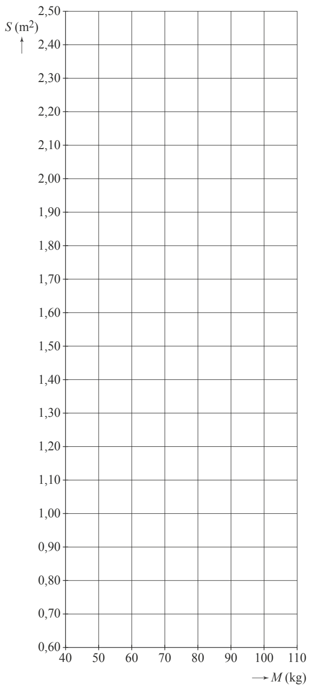
Je kunt bijvoorbeeld in de figuur aflezen dat iemand die 55 kg weegt en 130 cm lang is, volgens dit model een lichaamsoppervlakte van ongeveer 1,35 m^2 heeft.

Meneer Franssen weegt 85 kg. Hij is 180 cm lang. Zijn buurman is even lang, maar hij weegt slechts 65 kg.

3p **5** Bepaal met behulp van de figuur hoeveel m^2 het verschil volgens dit model zou zijn tussen de lichaamsoppervlakte van meneer Franssen en de lichaamsoppervlakte van zijn buurman.

Bij een vaste lengte L kunnen in de figuur bij verschillende waarden van M de bijbehorende waarden van S worden afgelezen.

4p **6** Teken in onderstaande figuur de grafiek van S voor personen met een lengte van 170 cm en gewichten van 40 tot en met 110 kg. Gebruik hiervoor minstens vijf in de figuur afgelezen punten en geef die duidelijk aan in je tekening.



Voor de grafiek van de vorige vraag (die hoort bij $L = 170$) geldt:

- de grafiek is stijgend;
- de grafiek is afnemend stijgend.

Dit geldt niet alleen voor de grafiek die hoort bij $L = 170$.

3p **7** Leg uit hoe je in de figuur op de vorige bladzijde kunt aflezen dat de grafiek die hoort bij $L = 180$ ook stijgend is én afnemend stijgend.

De figuur is gebaseerd op de formule

$$S = 0,007184 \cdot L^{0,725} \cdot M^{0,425}$$

Hierin is S de lichaamsoppervlakte in m^2, L de lichaamslengte in cm en M het lichaamsgewicht in kg.

In 2011 onderzocht het CBS (Centraal Bureau voor de Statistiek) kenmerken van personen van 20 jaar en ouder. De gemiddelden van de opgegeven lengtes en gewichten staan in de tabel.

tabel

	gemiddelde lengte (cm)	**gemiddeld gewicht (kg)**
vrouwen	167,5	70
mannen	180,9	84

4p **8** Bereken met de formule hoeveel procent de lichaamsoppervlakte van een man van gemiddelde lengte en gewicht groter is dan die van een vrouw van gemiddelde lengte en gewicht.

Van een persoon is gegeven dat zijn lichaamsoppervlakte 1,90 m^2 is. Van zijn gewicht is alleen bekend dat het minstens 72 kg en hoogstens 89 kg is.

4p **9** Bereken met behulp van de formule voor S de minimale lengte in gehele cm van deze persoon.

De lichaamslengte in meter noemen we l. Er geldt: $L = 100 \cdot l$.
De oorspronkelijke formule kan daarmee herleid worden tot de vorm

$S = a \cdot l^b \cdot M^{0,425}$, waarin a en b getallen zijn.

3p **10** Voer deze herleiding uit en geef daarbij de waarden van a en b in drie decimalen nauwkeurig.

Uitvaltijd

Bij het bedrijf Alutech, dat aluminium buizen produceert, werkt men aan één stuk door van maandagmorgen tot en met zaterdagmiddag. De werknemers van dit bedrijf werken in ploegendiensten van 8 uur. Daarbij zijn er twee dagdiensten, genaamd A en B, en één nachtdienst N. Zie tabel 1.

tabel 1 werktijden Alutech

	ma	**di**	**wo**	**do**	**vr**	**za**	**zo**
07.00 – 15.00 uur	A	A	A	A	A	A	-
15.00 – 23.00 uur	B	B	B	B	B	-	-
23.00 – 07.00 uur	N	N	N	N	N	-	-

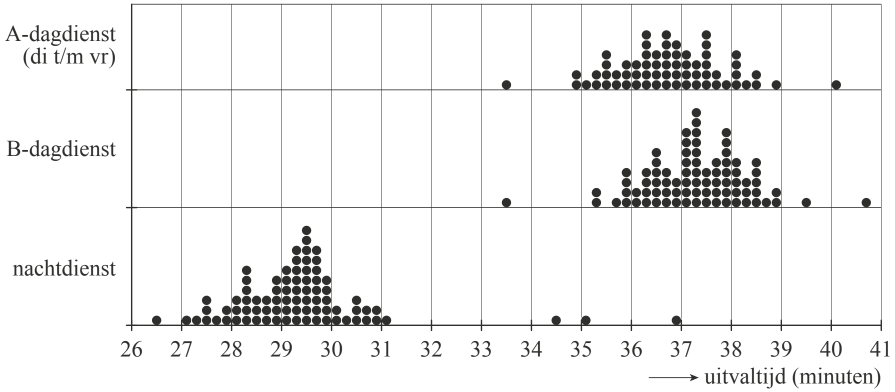
Op maandagmorgen is men de eerste 3 uur van de A-dienst bezig om het productieproces op te starten en op zaterdagmiddag wordt het laatste uur van de A-dienst gebruikt om het proces gecontroleerd stil te zetten. Alle overige tijd wordt beschouwd als mogelijke productietijd.

3p **11** Bereken het aantal uren mogelijke productietijd per week.

Tijdens elke dienst komen er storingen voor. Het productieproces wordt dan een aantal minuten stilgelegd totdat de storing verholpen is. Telkens wordt bijgehouden hoe lang de storing duurt. Na afloop van de dienst wordt de totale tijd van alle storingen genoteerd. Deze tijd noemt men de uitvaltijd. De directie wil dat de **uitvaltijd** zo klein mogelijk is.

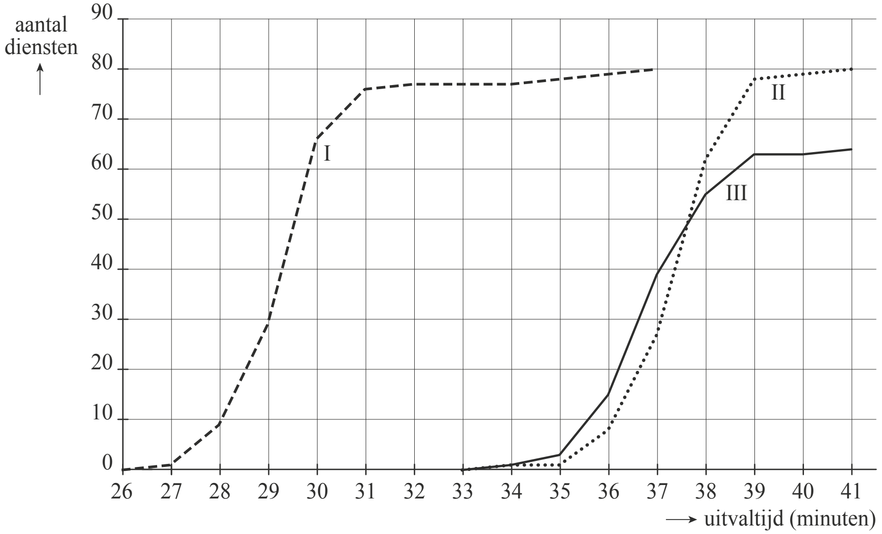
Om te onderzoeken hoe groot de uitvaltijd is, heeft men van 16 werkweken de uitvaltijden van de dag- en nachtdiensten vergeleken. Daarbij heeft men bij de A-diensten alleen gekeken naar de diensten die op dinsdag tot en met vrijdag vallen. De resultaten staan in de dotplot in figuur 1.

figuur 1 **uitvaltijd per dienst**



Met de gegevens uit de dotplot zijn van alle diensten cumulatieve frequentiepolygonen gemaakt. Er is gebruikgemaakt van een klassenindeling met klassenbreedte 1 minuut. Zie figuur 2.

figuur 2



3p **12** Beredeneer met behulp van figuur 1 welke cumulatieve frequentiepolygoon hoort bij dagdienst B.

Tot verbazing van de directie is de uitvaltijd tijdens de nachtdiensten in vrijwel alle gevallen lager dan tijdens de beide dagdiensten. Omdat elke minuut uitvaltijd het bedrijf geld kost, besluit de directie nader onderzoek te doen naar de uitvaltijden van de drie verschillende diensten.

De directie berekent de mediaan, het eerste kwartiel en het derde kwartiel van de uitvaltijd voor elk van de drie diensten. Zie tabel 2.

tabel 2 **uitvaltijd per dag- of nachtdienst in minuten**

	mediaan	eerste kwartiel	derde kwartiel
dagdienst A (di-vr)	36,7	36,1	37,5
dagdienst B	37,3	36,6	37,9
nachtdienst	29,3	28,5	29,7

Eerst kijkt de directie alleen naar het verschil tussen dagdienst A en dagdienst B. Met behulp van boxplots kun je een uitspraak doen over het verschil tussen de uitvaltijden van de twee dagdiensten. Daarvoor hoeven de boxplots niet getekend te worden.

4p **13** Bepaal met behulp van het formuleblad en tabel 2 of het verschil in uitvaltijd tussen dagdienst A en dagdienst B groot, middelmatig of gering is.

In figuur 1 is te zien dat er bij alle diensten waarnemingen zijn die opvallend afwijken van de rest. We leggen daarom vast wat we in deze opgave met een uitschieter bedoelen:

> Een **uitschieter** is een waarneming die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste of boven het derde kwartiel ligt.

4p **14** Bepaal hoeveel waarnemingen bij dagdienst B uitschieters zijn.
Van elk van de drie verschillende diensten worden ook de gemiddelde uitvaltijd en de standaardafwijking berekend. Zie tabel 3.

tabel 3 **uitvaltijd per dag- of nachtdienst in minuten**

	gemiddelde	standaardafwijking
dagdienst A (di-vr)	36,75	1,10
dagdienst B	37,29	1,04
nachtdienst	29,39	1,53

Men vermoedt dat de lagere uitvaltijden tijdens de nachtdiensten te maken hebben met het feit dat de energietoevoer gedurende de nacht constanter is dan overdag. Daarom wordt de energietoevoer overdag verbeterd. De directie van Alutech hoopt daarmee de uitvaltijden van de dagdiensten terug te dringen.

Na verloop van tijd blijkt dat de gemiddelde uitvaltijd van de A-diensten van dinsdag tot en met vrijdag gelijk geworden is aan de gemiddelde uitvaltijd van de nachtdiensten. Ook de gemiddelde uitvaltijd van alle B-diensten is gelijk geworden aan de gemiddelde uitvaltijd van de nachtdiensten. De standaardafwijkingen van de A-diensten en B-diensten zijn niet veranderd.

Je kunt nu voor dagdienst B de oude met de nieuwe situatie vergelijken.

3p **15** Bereken met behulp van het formuleblad voor dagdienst B of het verschil in uitvaltijd tussen de oude en de nieuwe situatie groot, middelmatig of gering is.

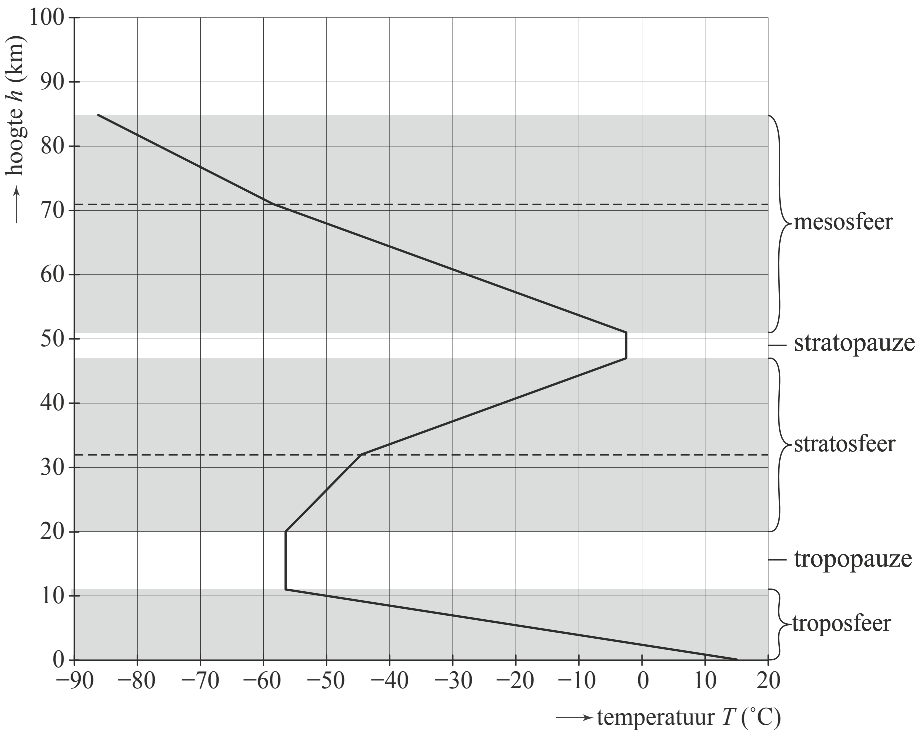
Doordat de gemiddelde uitvaltijd van de A-diensten van dinsdag tot en met vrijdag en van alle B-diensten is teruggedrongen tot het gemiddelde van de uitvaltijd van de nachtdiensten, zal de productietijd toenemen.

4p **16** Bereken met hoeveel uur de totale netto productietijd op jaarbasis toeneemt. Neem hierbij aan dat men 51 volledige werkweken per jaar werkt. Laat hierbij de A-diensten van maandag en zaterdag buiten beschouwing.

Atmosfeer

De atmosfeer, ook wel dampkring genoemd, is het gasvormige omhulsel van de aarde en is opgebouwd uit verschillende lagen. De onderste drie lagen zijn de troposfeer, de stratosfeer en de mesosfeer. De overgangszone tussen de onderste twee lagen wordt de tropopauze genoemd, de overgangszone daarboven de stratopauze. Zie de figuur. De hoogtes waarop de verschillende lagen en overgangszones zich bevinden, zijn niet overal op aarde gelijk en kunnen door de tijd heen variëren. Om zaken toch goed te kunnen vergelijken heeft men een model voor de onderste drie lagen en overgangszones vastgesteld: de standaardatmosfeer. De temperatuur op een bepaalde hoogte is in de figuur af te lezen. Daarin zie je het verband tussen de temperatuur T in °C en de hoogte h in km. Zo kun je aflezen dat op een hoogte van 10 km de temperatuur –50 °C is.

figuur



In elk van de drie sferen is er een laagste en hoogste temperatuur.

2p **17** Bepaal in welke van de drie sferen het verschil tussen de hoogste en laagste temperatuur het kleinst is. Licht je antwoord toe.

De stratosfeer bestaat uit twee delen. In beide delen neemt de temperatuur toe naarmate je hoger komt. Voor de temperatuur in het bovenste deel geldt de formule $T = 2{,}8 \cdot h - 134{,}1$. Je kunt deze formule herleiden tot de vorm $h = a \cdot T + b$, waarbij a en b getallen zijn.

3p **18** Laat deze herleiding zien en rond a en b af op twee decimalen.

Ook voor andere sferen, bijvoorbeeld voor de mesosfeer, kun je formules opstellen van het verband tussen de hoogte en de temperatuur.
De mesosfeer bestaat uit twee delen.

5p **19** Stel voor het onderste deel van de mesosfeer de formule op van h, uitgedrukt in T.

Niet alleen de temperatuur, ook de luchtdruk hangt af van de hoogte.
Luchtdruk wordt vaak uitgedrukt in hectopascal of hPa. De luchtdruk op een hoogte van 0 kilometer is gelijk aan 1013 hPa en boven in de mesosfeer, op 85 km, is de luchtdruk 0,0037 hPa.
Het verband tussen de luchtdruk en de hoogte is exponentieel.

Met behulp van bovenstaande gegevens kun je berekenen dat de luchtdruk elke kilometer met ongeveer 14% afneemt.

4p **20** Bereken dit percentage in één decimaal nauwkeurig.

Om gegevens over het weer te verzamelen wordt een weerballon opgelaten met meetapparatuur, waaronder een thermometer. De ballon zet uit naarmate hij hoger in de atmosfeer komt, omdat de luchtdruk steeds verder afneemt. Op het moment dat de luchtdruk 4,5 hPa is, scheurt de ballon open en valt hij naar beneden.

6p **21** Bereken de temperatuur die de ballon meet op zijn maximale hoogte.
Rond je antwoord af op een geheel getal.

Zonnepanelen

Steeds meer mensen kopen zonnepanelen omdat ze willen besparen op hun energiekosten. De energie die opgewekt wordt door zonnepanelen is namelijk gratis. In tabel 1 staat hoeveel energie een huishouden jaarlijks gemiddeld verbruikt. De prijzen van zonnepanelen inclusief installatie en onderhoud staan in tabel 2.

tabel 1

aantal personen per huishouden	gemiddeld energieverbruik per jaar in kiloWattuur (kWh)
1	2300
2	3400
3	4100
4	4620
5	5300
6	5400

tabel 2

aantal zonnepanelen	prijs inclusief installatie en onderhoud (euro)
16	7600
17	7975
18	8350
19	8725
20	9100
21	9650
22	10 200
23	10 700
24	11 200
25	11 700

SolarXL, een bedrijf dat zonnepanelen verkoopt en de prijzen uit tabel 2 hanteert, adverteert in het jaar 2017 met de volgende slogan:

Het huishouden van de familie Jaspers bestaat in totaal uit vier personen en heeft elk jaar een gemiddeld energieverbruik voor een huishouden van vier personen. Meneer Jaspers overweegt in het jaar 2017 om zonnepanelen aan te schaffen en die vanaf 1 januari 2018 te gebruiken.
Er zullen dan zo min mogelijk, maar voldoende zonnepanelen aangeschaft worden zodat alle benodigde energie door de panelen geleverd kan worden.

Meneer Jaspers vraagt zich af of de slogan van SolarXL voor zijn gezin klopt. Om dat te berekenen, doet hij de volgende aannames:
- Elk zonnepaneel levert jaarlijks 210 kWh energie op.
- De prijs van energie per kWh in het jaar 2017 bedraagt € 0,22 (voor huishoudens zonder zonnepanelen).
- De prijs van energie per kWh zal jaarlijks met € 0,003 toenemen.
- Er wordt geen winst gemaakt op het geldbedrag dat bespaard zou worden door geen zonnepanelen te kopen: het wordt dus bijvoorbeeld niet op een spaarrekening gezet.

7p **22** Onderzoek of de slogan klopt voor de situatie van dit gezin, uitgaande van bovenstaande aannames.

Hints bij examen 2017-II

1 Bedenk welke grafiek hoort bij de gegevens. Procentuele toename, dus $\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \cdot 100\%$

2 Lineair extrapoleren, dus bereken eerst de toename per jaar.

3 Er is sprake van exponentiele groei. Bereken eerst de groeifactor per jaar.

4 Met de gegevens uit de tabel, kun je het aantal inwoners in 1990 en in 2010 berekenen. Bereken eerst hoeveel personenauto's er per inwoner zijn.

5 Lees bij $L = 180$ bij Fransen en bij buurman bij de gegeven M de waarde voor S af.

6 Lees eerst minimaal 5 punten af. Neem $L = 170$ vast. Neem een zelfgekozen M en bepaal de bijbehorende S. Teken dan een vloeiende kromme door de punten (M, S).

7 Stijging, dus toon aan dat als M toeneemt, S ook toeneemt. Afnemende stijging, dus toon aan dat als M toeneemt, de toename steeds kleiner wordt.

8 Gebruik de gegevens uit de tabel en bereken eerst de waarde van S voor de vrouwen en de mannen.

9 S staat vast, dus hoe groter M hoe kleiner L.

10 De formule $L = 100 \cdot I$ substitueren in de gegeven formule. Maak gebruik van de regel $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

11 Men werkt aan één stuk door, van maandagmorgen tot en met zaterdagmiddag. Opstarten en stil zetten, wordt niet beschouwd als productietijd.

12 Bekijk figuur 1. De stippen geven de frequenties weer. Bedenk wat de start- en eindwaarden zijn van het cumulatief frequentiepolygoon van de B-dagdienst.

13 Zie het formuleblad "Twee boxplots vergelijken".

14 Bereken eerst 1,5 · interkwartielafstand en de grenswaarden voor een uitschieter.

15 Zie het formuleblad "Effectgrootte".

16 Bereken eerst de toename per dag voor dagdienst A en voor dagdienst B. Ga daarna uit van 51 weken en laat bij de A-dienst de maandag en zaterdag buiten beschouwing!

17 Het gaat om het verschil tussen de hoogste en de laagste temperatuur, dus kijk naar het verschil op de horizontale as.

18 Herschrijf de gegeven formule in een vorm $h =$

19 Rechte lijn dus de formule is van de vorm $h = a \cdot T + b$. Lees eerst twee punten (T, h) af.

20 Exponentiële groei, dus bereken eerst de groeifactor (voor 85 kilometer stijging).

21 Verdeel de vraag in deelvragen.
Maak gebruik van de gegeven luchtdruk op 0 km hoogte en de afname van 14% per km om een formule op te stellen van L uitgedrukt in h.
Bereken met behulp van deze formule op welke hoogt de ballon knapt.
Bepaal met behulp van de gevonden hoogte de gevraagde temperatuur.

22 Verdeel de vraag in deelvragen en bedenk eerst welke gegevens je nodig hebt om je deelvraag te beantwoorden.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2017-II

Personenauto's in Nederland

3p **1** *Bedenk welke grafiek en welke as bij deze vraag hoort.*
In 2000 zijn er 6,3 miljoen personenauto's en in 2011 zijn dit er 7,7 miljoen. [1p]
Procentuele toename: $\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \cdot 100\% = \frac{7{,}7 - 6{,}3}{6{,}3} \cdot 100\% \approx 22\%$ [1p]
Conclusie: er is een toename van ongeveer 22%. [1p]

4p **2** *Gemiddelde jaarlijkse toename van het aantal personenauto's. Lineair extrapoleren.*
In 2000 zijn er 400 personenauto's per 1000 inwoners en in 2011 zijn dit er 460. [1p]
Per 11 jaar is er een toename van 460 – 400 = 60, dus per jaar is er een toename van $\frac{60}{11}$. [1p]
1 januari 2020, dus 9 jaar na 2011 zijn er $460 + 9 \cdot \frac{60}{11} = 509{,}09\ldots$ personenauto's per 1000 inwoners. [1p]
Conclusie: 1 januari 2020 zijn er 509 personenauto's per 1000 inwoners. [1p]

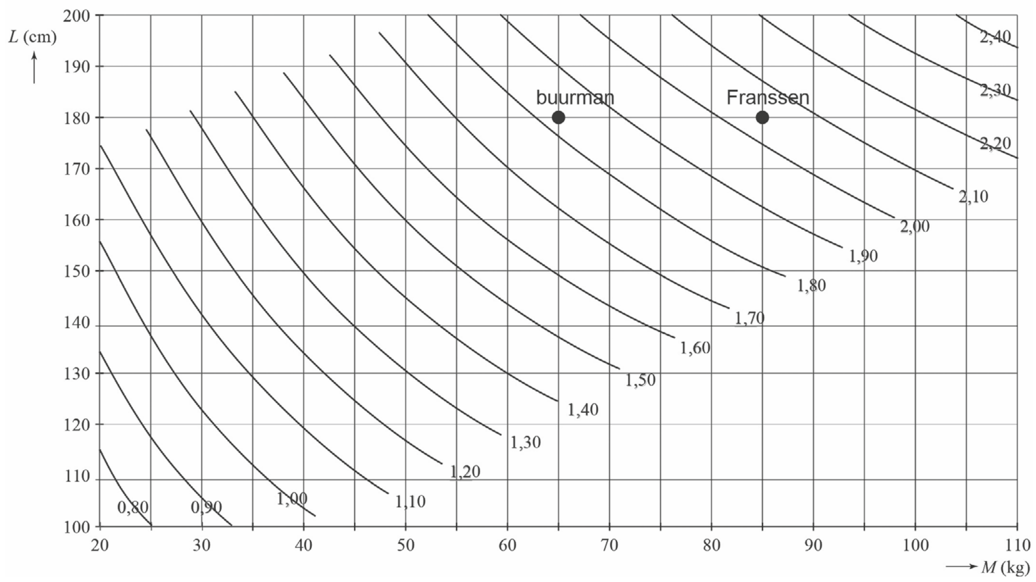
3p **3** *Exponentieel, dus bereken de groeifactor.*
Op 1 januari 2011 zijn er 2100 gedeelde auto's en op 1 januari 2012 zijn dit er 2600.
De groeifactor per jaar is $\frac{2600}{2100} \approx 1{,}238\ldots$. [1p] Op 1 januari 2012 zijn er 2600, dus 6 jaar later op 1 januari 2018 zijn er $2600 \cdot 1{,}238^6 \approx 9364{,}78$, [1p] afgerond op honderdtallen zijn dit er 9400.
Conclusie: op 1 januari 2018 zijn er 9400 gedeelde auto's. [1p]

3p **4** Voor 1990 geldt:
Per 1000 inwoners zijn er 344 personenauto's, dus per inwoner zijn er 0,344 personenauto's.
Er zijn 5 118 429 personenauto's, dus het aantal inwoners = $\frac{5\,118\,429}{0{,}344} \approx 14\,879\,154$. [1p]
Voor 2010 geldt:
Per 1000 inwoners zijn er 460 personenauto's, dus per inwoner zijn er 0,460 personenauto's.
Er zijn 5 118 429 personenauto's, dus het aantal inwoners = $\frac{7\,622\,353}{0{,}460} \approx 16\,570\,333$. [1p]
Er is een toename van 16 570 333 – 14 879 154 = 1691 179.
Conclusie: afgerond op duizendtallen is er een toename van 1 691 000 inwoners. [1p]

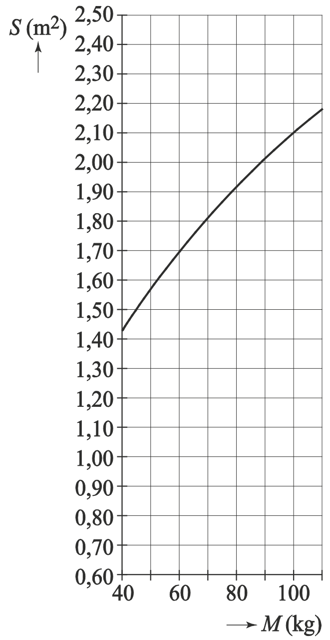
Lichaamsoppervlakte

3p **5** *S is lichaamsoppervlakte in m², L is lichaamslengte in cm en M is het lichaamsgewicht in kg.*
In de figuur aflezen bij
Franssen: $L = 180$ en $M = 85$ geeft $S \approx 2{,}04$ [1p]
buurman: $L = 180$ en $M = 65$ geeft $S \approx 1{,}83$ [1p]
Het verschil in lichaamsoppervlakte is 2,04 – 1,83 = 0,21 dus ongeveer 0,21 m². [1p]

lichaamsoppervlakte S (m²)



4p **6** *Eerst minimaal vijf punten aflezen uit de figuur.* [3p]
Punten zijn bijvoorbeeld:
$L = 170$ en $M = 40$ geeft $S \approx 1{,}42$, dus $(M, S) = (40; 1{,}42)$
$L = 170$ en $M = 50$ geeft $S \approx 1{,}58$, dus $(M, S) = (50; 1{,}58)$
$L = 170$ en $M = 60$ geeft $S \approx 1{,}70$, dus $(M, S) = (60; 1{,}70)$
$L = 170$ en $M = 80$ geeft $S \approx 1{,}92$, dus $(M, S) = (80; 1{,}92)$
$L = 170$ en $M = 100$ geeft $S \approx 2{,}10$, dus $(M, S) = (100; 2{,}10)$
$L = 170$ en $M = 110$ geeft $S \approx 2{,}18$, dus $(M, S) = (110; 2{,}18)$
Teken een vloeiende kromme door de punten. [1p]



3p **7** *Afnemend stijgend, dus er is toename en de toename wordt steeds kleiner. Het gaat om het gedrag van de grafiek van S bij toenemende M.*

eerste manier:
Op de lijn $L = 180$ bijvoorbeeld aflezen

M	50	60	70	80	90	100
S	1,63	1,77	1,89	2,00	2,10	2,18

In de figuur op de lijn $L = 180$ stijgen de waarden van S als M toeneemt, dus de grafiek is stijgend. [1p]
In de tabel stijgt M steeds met 10 en de toename van S wordt steeds kleiner, dus er is sprake van afnemende stijging. [2p]

tweede manier:
In de figuur is te zien dat op de lijn $L = 180$ de waarden voor S stijgen als M toeneemt. [1p]
De snijpunten van de getekende grafieken met de lijn $L = 180$ voor grotere waarden van M liggen steeds iets verder uit elkaar (zie onderstaande tabel).

M	1,50	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10
S	42	48	55	62,5	71	80,5	91

Er is dus sprake van afnemende stijging. [2p]

4p **8** *Gebruik de gegevens uit de tabel en de formule.*
Bekend zijn de gegevens

	gemiddelde lengte (cm)	**gemiddelde gewicht (kg)**
vrouwen	$L = 167{,}5$	$M = 70$
mannen	$L = 180{,}9$	$M = 84$

De gegevens invullen in de formule: $S = 0{,}007\,184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425}$
Vrouwen: $S = 0{,}007\,184 \cdot 167{,}5^{0{,}725} \cdot 70^{0{,}425} \approx 1{,}790$ [1p]
Mannen: $S = 0{,}007\,184 \cdot 180{,}9^{0{,}725} \cdot 84^{0{,}425} \approx 2{,}046$ [1p]
$\frac{2{,}046}{1{,}170} \approx 1{,}14$ [1p] dus het lichaamsoppervlakte van de mannen is 14% groter dan van de vrouwen. [1p]

4p **9** *S is een vast getal. Uit de formule volgt dan dat als M toeneemt, L moet afnemen. Gevraagd wordt de minimale lengte, dus neem de grootste M. De grafische rekenmachine mag gebruikt worden.*
$S = 1{,}90$ en $72 \leq M \leq 89$, de grootste $M = 89$
$S = 1{,}90$ en $M = 89$ invullen in $S = 0{,}007\,184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425}$: [1p]
$1{,}90 = 0{,}007\,184 \cdot L^{0{,}725} \cdot 89^{0{,}425}$, dus
$1{,}90 = 0{,}0484 \cdot L^{0{,}725}$ [1p]
Grafische rekenmachine:
$y_1 = 0{,}0484 \cdot x^{0{,}725}$ en $y_2 = 1{,}90$en WINDOW = $[100, 200] \times [0, 3]$
Intersect geeft $x \approx 157{,}9$ [1p]
Conclusie: de minimale lengte is 158 cm. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

3p **10** $L = 100 \cdot l$ invullen in $S = 0{,}007\,184 \cdot L^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425}$ geeft
$S = 0{,}007\,184 \cdot (100 \cdot l)^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425} =$ [1p]
$0{,}007\,184 \cdot 100^{0{,}725} \cdot l^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425} =$ [1p]
$0{,}007\,184 \cdot 28{,}1838 \cdot l^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425} = 0{,}202 \cdot l^{0{,}725} \cdot M^{0{,}425}$ [1p]
Conclusie: $a = 0{,}202$ en $b = 0{,}725$.

Uitvaltijd

3p **11** *Productietijd is de tijd buiten opstarten en stil zetten.*
Op dinsdag, woensdag, donderdag en vrijdag is er 24 uur productietijd.
Op maandag is 21 uur productietijd (24 uur – 3 uur opstarttijd). [1p]
Op zaterdag is er 7 uur productietijd (8 uur – 1 uur stil zetten van proces). [1p]
Conclusie: totaal is er $7 + 21 + 24 \cdot 4 = 124$ uur productietijd. [1p]

3p **12** *Vergelijk in figuur 1 de drie diensten.*
In figuur 2 is een cumulatief frequentie polygoon getekend van alle diensten met een klassenbreedte van 1 minuut.
Bij de B-dagdienst loopt de uitvaltijd per dienst van 33,5 minuut tot en met bijna 41 minuten. Dus de polygoon loopt van 33 tot en met 41. Figuur 1 loopt van 26 tot en met 37 minuten, dus figuur I valt af. [1p]
Het polygoon van de A-dagdienst en de B-dagdienst lopen beiden van 33 tot en met 41.
*Bij de A-dagdienst staan er 3 bolletjes tussen de 33 en 35, bij de B-dagdienst is dit er 1. [1p] Hieruit volgt dat polygoon III bij de A-dagdienst hoort en polygoon II bij de B-dagdienst. [1p]
of
*Bij de B-dagdienst is het totaal aantal stippen (80) hoger dan bij de A-dagdienst (64), dus het cumulatieve polygoon komt hoger uit. [1p]
Hieruit volgt dat polygoon III bij de A-dagdienst hoort en polygoon II bij de B-dagdienst. [1p]
Conclusie: de B-dagdienst hoort bij polygoon II. [1p]
**Het is voldoende om één van beide argumenten te noemen.*

4p **13** *Gebruik het formuleblad voor het verschil tussen twee groepen, twee boxplots te vergelijken. Zonder de tekening van de boxplots te gebruiken.*
Overlappen de boxen van de boxplots elkaar? Zo niet, dan is "het verschil groot". Zo ja dan verder onderzoeken.
Als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot ligt buiten de box van de andere boxplot, dan is "het verschil middelmatig".
In alle andere gevallen is "het verschil gering".

	eerste kwartiel	mediaan	derde kwartiel
Dagdienst A	36,1	36,7	37,5
Dagdienst B	36,6	37,3	37,9

De box van A loopt van 36,1 tot en met 37,5 en de box van B loopt van 36,6 tot en met 37,9.
37,5 (bijvoorbeeld het derde kwartiel van A) ligt tussen 36,6 tot en met 37,9 (de box van B), dus de boxen overlappen elkaar. [1p] Er is dus **geen** sprake van groot verschil.
De mediaan van A is 36,7 deze ligt tussen 36,6 en 37,9, dus binnen de box van B. [1p]
De mediaan van B is 37,3 deze ligt tussen 36,1 en 37,5, dus binnen de box van A. [1p]
Conclusie: er is sprake van "een gering verschil". [1p]

© ThiemeMeulenhoff

4p **14** *Een uitschieter is een waarneming die meer dan 1,5 keer de interkwartielafstand onder het eerste of boven het derde kwartiel ligt.*

	eerste kwartiel	mediaan	derde kwartiel
Dagdienst B	36,6	37,3	37,9

De interkwartielafstand van B is 37,9 – 36,6 = 1,3 [1p]
1,5 keer de interkwartielafstand is 1,5 · 1,3 = 1,95
Eerste kwartiel – 1,5 keer interkwartielafstand = 36,6 – 1,95 = 34,65 [1p]
Derde kwartiel + 1,5 keer interkwartielafstand = 37,9 + 1,95 = 39,85 [1p]
Het aantal waarnemingen (stippen) lager dan 34,65 of hoger dan 39,85 is gelijk aan 2 [1p]
(tel het aantal stippen in figuur 1 bij B-dagdienst).

3p **15** *Noteer alle gegevens en gebruik de formulekaart.*

	voor verbetering		na verbetering van energietoevoer	
	gemiddelde	standaardafwijking	gemiddelde	standaardafwijking
dagdienst B	$37{,}29 = \overline{X}_1$	$1{,}04 = S_1$	$29{,}39 = \overline{X}_2$	$1{,}04 = S_2$

Formule voor de effectgrootte $E = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$ $(\overline{X}_1 \geq \overline{X}_2)$ [1p]

De gegevens invullen geeft: $E = \dfrac{37{,}29 - 29{,}39}{\frac{1}{2}(1{,}04 + 1{,}04)} = \dfrac{7{,}9}{1{,}04} \approx 7{,}6 > 0{,}8$ [1p]

Conclusie: het verschil is groot. [1p]

4p **16** *Het gaat om de toename in uren van de nettoproductietijd over 51 weken van maandag tot en met vrijdag.*
Onderstaand is het gemiddelde van de uitvaltijd per dag- of nachtdienst in minuten.

	gemiddelde voor verbetering	gemiddelde na verbetering van energietoevoer
dagdienst A (di t/m vr)	36,75	29,39
dagdienst B	37,29	29,39

Voor dagdienst A is er een verbetering van 36,75 – 29,39 = 7,36 minuut per dag.
Voor dagdienst B is er een verbetering van 37,29 – 29,39 = 7,9 minuut per dag. [1p]
Uit de tekst in de opgave volgt dat we rekenen met 51 weken van 5 werkdagen voor dagdienst B en met 51 weken van 4 werkdagen voor dagdienst A (di t/m vr).
Voor dagdienst A is de totale verbetering 51 · 4 · 7,36 minuut = 1501,44 minuten = 25,024 uur. [1p]
Voor dagdienst B is de totale verbetering 51 · 5 · 7,9 minuut = 2014,5 minuten = 33,575 uur. [1p]
Conclusie: de totale verbetering is 25,024 + 33,575 = 58,599 uur oftewel bijna 59 uur. [1p]

Atmosfeer

2p **17** *Het gaat om het verschil tussen de hoogste en de laagste temperatuur per sfeer (dus de grijze balk).* [1p]
Bij de troposfeer is het verschil ongeveer 15 °C – –56 °C = 71 °C
Bij de stratosfeer is het verschil ongeveer –2 °C – –56 °C = 54 °C
Bij de mesosfeer is het verschil ongeveer –2 °C – –86 °C = 84 °C
Conclusie: bij de stratosfeer is het verschil het kleinste. [1p]
of
Conclusie: bij de stratosfeer, want hier is de horizontale afstand het kleinste.

3p **18** $T = 2{,}8 \cdot h - 134{,}1$, herleiden tot $h = \ldots$

$2{,}8 \cdot h = 1 \cdot T + 134{,}1$ [1p] dus $h = \dfrac{1}{2{,}8} \cdot T + \dfrac{134{,}1}{2{,}8}$ [1p]

Afronden op twee decimalen geeft $h = 0{,}36 \cdot T + 47{,}89$ [1p]

5p **19** *Het onderste deel van de grafiek van de mesosfeer is een rechte lijn, dus de formule is van de vorm $h = a \cdot T + b$. (h uitgedrukt in T), dus schrijf het punt als (T, h).*
Twee punten aflezen: bijvoorbeeld (–2,5; 51) en (–58,5; 71) [1p]

Richtingscoëfficiënt $a = \dfrac{71 - 51}{-58{,}8 - -2{,}5} = \dfrac{20}{-56{,}3} \approx -0{,}355$ [2p]

Bijvoorbeeld punt (–2,5; 51) invullen in $h = -0{,}355 \cdot T + b$ geeft $51 = -0{,}355 \cdot -2{,}5 + b$
dus $b = 51 - 0{,}888 = 50{,}112$ [1p]
Conclusie: $h = -0{,}355 \cdot T + 50{,}112$ [1p]
Opmerking: ook een afgerond antwoord als $h = -0{,}4 \cdot T + 50$ wordt goed gerekend.

4p **20** *Exponentiële groei, bereken eerst een groeifactor.*
Hoogte = 0 km en luchtdruk = 1013 hPA.
Hoogte = 85 km en luchtdruk = 0,0037 hPA.

De groeifactor per 85 km is $\dfrac{0{,}0037}{1013}$ [1p]

dus de groeifactor per km is $\left(\dfrac{0{,}0037}{1013}\right)^{\frac{1}{85}} \approx 0{,}863039\ldots$ [2p]

Er is een afname van 13,696... % (= (1 – 0,863039...) · 100%))
Conclusie: de afname in één decimaal nauwkeurig is 13,7% [1p]

6p **21** *De ballon scheurt open bij een luchtdruk van 4,5 hPA. Gebruik de gegevens bij de vorige opgave om een formule voor de luchtdruk op te stellen.*
Op een hoogte $h = 0$ km is de luchtdruk $L = 1013$ hPa
De groeifactor per km is 0,86 (zie onderdeel 20).
De formule wordt: $L = 1013 \cdot 0{,}86^h$ [1p]
De luchtballon knapt als $L = 4{,}5$ hPa dus los op $L = 1013 \cdot 0{,}86^h = 4{,}5$ [1p]
Grafische rekenmachine: $y_1 = 1013 \cdot 0{,}86^x$ en $y_2 = 4{,}5$ en WINDOW [0, 50]×[0, 10]
Intersect geeft $x \approx 35{,}9$ [1p]
Dus de ballon knapt op een hoogte van 35,9 km. [1p]
De temperatuur kan nu worden gevonden met de formule of de figuur.
$h = 35{,}9$ invullen in de formule: $T = 2{,}8 \cdot h - 134{,}1$ (zie onderdeel 18), geeft temperatuur $T = 2{,}8 \cdot 35{,}9 - 134{,}1 = -33{,}58$ [1p]
of
Uit de figuur lees je af: bij $h = 35{,}9$ op de verticale as, hoort $T = -34$ °C op de horizontale as.
Conclusie: de gevraagde temperatuur is afgerond op een geheel getal –34 °C. [1p]

Zonnepanelen

7p **22** *Bereken de kosten met en zonder zonnepanelen en vergelijk ze met elkaar.*
Kosten met zonnepanelen
Er is per jaar voor een gezin van 4 personen (zie tabel 1) 4620 kWh energie nodig.
Elk zonnepaneel levert 210 kWh energie.

De energie kan door de zonnepanelen geleverd worden als er $\frac{4620}{210} = 22$ panelen worden aangeschaft. [1p]
De totale kosten voor de aanschaf is € 10 200 euro (zie tabel 2). [1p]

Energiekosten zonder zonnepanelen
De energieprijs in 2017 is € 0,22 en deze neemt elk jaar met € 0,003 toe.
Dus de energieprijs in 2018 is 0,223 euro per kWh. [1p] Dat geeft het volgende overzicht.
De energieprijzen per jaar zijn: [1p]

jaar	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027
in euro	0,22	0,223	0,226	0,229	0,232	0,235	0,238	0,241	0,244	0,247	0,250

Een gezin van 4 personen (zie tabel 1) verbruikt per jaar 4620 kWh vanaf 2018 tot en 2027 (10 jaar vanaf het plaatsen van de zonnepanelen).
De totale kosten voor verbruik zijn:
$4620 \cdot (0{,}223 + 0{,}226 + 0{,}229 + 0{,}232 + 0{,}235 + 0{,}238 + 0{,}241 + 0{,}244 + 0{,}247 + 0{,}25) =$
$4620 \cdot 2{,}365 =$ € 10 926,30 [2p]

Vergelijking energie-kosten met/zonder zonnepanelen
De kosten zonder zonnepanelen zijn hoger (€ 10 926,30) dan de kosten van de zonnepanelen (€ 10 200).

Conclusie: de slogan klopt voor de familie Jaspers. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Examen 2018-I

Brandgevaar

In de zomer kan in natuurgebieden met veel bos gemakkelijk brand ontstaan. Het risico op bosbrand wordt vooral bepaald door de temperatuur van de lucht en door de hoeveelheid vocht in de lucht.
Om het risico op bosbrand goed in beeld te krijgen, wordt gebruikgemaakt van een **brandgevaarindex**.
In Scandinavië gebruikt men als brandgevaarindex de Angström Index, die wordt berekend met de volgende formule:

$$I_A = \frac{V}{20} + \frac{27 - T}{10}$$

Hierin is I_A de Angström Index, V de relatieve luchtvochtigheid in procenten en T de temperatuur in °C. De relatieve luchtvochtigheid V geeft de hoeveelheid vocht in de lucht aan ten opzichte van de hoeveelheid vocht die de lucht maximaal kan bevatten. De relatieve luchtvochtigheid kan niet meer dan 100% zijn.

3p **1** Bereken de minimale en de maximale waarde van de Angström Index bij een temperatuur van 24 °C.

Hoe lager de waarde van I_A, hoe groter het risico op bosbrand. In tabel 1 kun je zien hoe de waarden van I_A worden vertaald naar het risico op bosbrand.

tabel 1

I_A	**risico op bosbrand**
4 of groter	zeer klein
van 2,5 tot 4	klein
van 2 tot 2,5	groot
kleiner dan 2	zeer groot

Op een bepaalde zomerdag is de relatieve luchtvochtigheid 35%.
5p **2** Bereken bij welke temperaturen er op deze dag sprake is van een zeer groot risico op bosbrand.

Als de temperatuur constant is, dan neemt het risico op bosbrand toe als de relatieve luchtvochtigheid afneemt.
3p **3** Beredeneer zonder getallenvoorbeelden dat de formule hiermee in overeenstemming is.

Een andere index voor brandgevaar is de Chandler Burning Index I_C, die in Noord-Amerika wordt gebruikt. Deze wordt berekend met de volgende formule:

$$I_C = (216 - 2{,}84V + 1{,}12T) \cdot 0{,}97^V$$

Ook in deze formule is V de relatieve luchtvochtigheid in procenten en T de temperatuur in °C.

Als de relatieve luchtvochtigheid bekend is, dan is de formule van I_C te herleiden tot de vorm $I_C = a \cdot T + b$, waarbij a en b getallen zijn.

4p **4** Geef deze herleiding voor het geval dat de relatieve luchtvochtigheid 43% is. Rond de waarden van a en b af op twee decimalen.

In tabel 2 kun je zien hoe de waarden van I_C worden vertaald naar het risico op bosbrand.

tabel 2

I_C	**risico op bosbrand**
kleiner dan 50	zeer klein
van 50 tot 75	klein
van 75 tot 90	groot
90 of groter	zeer groot

De Angström Index en de Chandler Burning Index proberen beide het risico op bosbrand zo goed mogelijk weer te geven. Toch zijn er situaties waarin het risico volgens de ene index groot is en volgens de andere juist klein. Wellicht zijn er zelfs situaties waarin het risico op bosbrand volgens de Angström Index zeer groot is en volgens de Chandler Burning Index zeer klein.
Een brandgevaarexpert onderzoekt of er zo'n situatie mogelijk is bij een temperatuur van 25 °C. Bij deze temperatuur kan de Angström Index geschreven worden als

$I_A = 0,05V + 0,2$

De Chandler Burning Index kan bij 25 °C geschreven worden als

$I_C = (244 - 2,84V) \cdot 0,97^V$

De expert berekent met behulp van deze formules voor verschillende relatieve luchtvochtigheden het risico op bosbrand.

5p **5** Onderzoek of er een relatieve luchtvochtigheid mogelijk is waarbij het risico volgens de Angström Index zeer groot is en volgens de Chandler Burning Index zeer klein. Licht je antwoord toe.

Referentiewaarden

Bij een bloedonderzoek worden het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen gemeten. In de uitslag van het onderzoek staan van beide de gemeten waarden. Om deze uitslag te kunnen beoordelen, worden de gemeten waarden vergeleken met de bijbehorende **referentiewaarden**. Dit zijn de waarden zoals ze gevonden worden bij 95% van de gezonde mensen. In deze opgave bekijken we de referentiewaarden van volwassenen.

Het hemoglobinegehalte wordt uitgedrukt in millimol per liter (mmol/L) (een mol is een eenheid voor het aantal deeltjes) en de hoeveelheid rode bloedcellen in biljoenen per liter (1 biljoen = 1012). We gaan ervan uit dat het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde mannen normaal verdeeld zijn. Dit geldt ook voor het hemoglobinegehalte en de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde vrouwen.

In de tabel staan de referentiewaarden van het hemoglobinegehalte en van de hoeveelheid rode bloedcellen. Deze referentiewaarden liggen symmetrisch om het gemiddelde. Zo kun je in de tabel bijvoorbeeld aflezen dat 95% van de gezonde mannen een hemoglobinegehalte heeft tussen 8,6 mmol/L en 11,0 mmol/L.

tabel

	geslacht	**referentiewaarden**
hemoglobine	man	8,6 – 11,0
	vrouw	7,6 – 10,0
rode bloedcellen	man	4,4 – 5,8
	vrouw	4,0 – 5,3

3p **6** Bereken de standaardafwijking van de hoeveelheid rode bloedcellen van gezonde vrouwen. Geef je antwoord in biljoenen per liter en rond af op één decimaal.

De standaardafwijking van het hemoglobinegehalte van zowel gezonde mannen als gezonde vrouwen is 0,6 mmol/L.

4p **7** Bereken met behulp van het formuleblad of het verschil tussen het hemoglobinegehalte van gezonde mannen en gezonde vrouwen gering, middelmatig of groot is.

De aardbeving van l'Aquila

Aardbevingen verschillen in kracht. De kracht van een aardbeving wordt meestal weergegeven op de schaal van Richter.

In de nacht van 5 op 6 april 2009 werd de Italiaanse stad l'Aquila getroffen door een zware aardbeving. De avond ervoor werd er al een lichte beving gevoeld die een kracht had van 3,3 op de schaal van Richter. De zware aardbeving 's nachts, die veel schade aanrichtte, had een kracht van 6,3 op de schaal van Richter.

Bij elke aardbeving komt energie vrij. Volgens een wetenschapper geldt de volgende vuistregel: als de kracht op de schaal van Richter met 1 toeneemt, dan is de hoeveelheid vrijgekomen energie ongeveer 30 keer zo groot.

Er is bij de zware aardbeving 's nachts veel meer energie vrijgekomen dan bij de lichte beving van de avond daarvoor.

3p **8** Bereken met behulp van de vuistregel hoeveel keer zoveel energie er 's nachts vrijkwam vergeleken met de avond ervoor.

Bij een aardbeving kan de hoeveelheid vrijgekomen energie worden berekend met de formule

$E = 0,06 \cdot 32^R$

In deze formule is R de kracht van de aardbeving op de schaal van Richter en E de hoeveelheid vrijgekomen energie in MJ (megajoule).

Na de zware nachtelijke aardbeving waren er nog verschillende kleine naschokken. Bij de naschok van 7 april ’s avonds was de hoeveelheid energie die vrijkwam slechts 9% van de hoeveelheid energie die bij de zware nachtelijke aardbeving vrijkwam. Toch was deze naschok ook een zware schok.

5p **9** Bereken welke kracht deze naschok had op de schaal van Richter. Rond je antwoord af op één decimaal.

Op de uitwerkbijlage staat een assenstelsel afgebeeld, waarbij op de verticale as een logaritmische schaal is gebruikt. In dat assenstelsel kun je een grafiek tekenen waarin je de vrijgekomen energie uitzet tegen de kracht op de schaal van Richter. Deze grafiek blijkt een (rechte) lijn te zijn.

3p **10** Teken deze grafiek in de figuur op de uitwerkbijlage voor bevingen met een kracht van minimaal 1 en maximaal 8 op de schaal van Richter.

BMR

Mensen krijgen energie binnen via voedsel. De hoeveelheid energie in voedsel wordt uitgedrukt in kilocalorieën (kcal). De minimale hoeveelheid energie die iemand per dag nodig heeft om op gewicht te blijven, wordt aangeduid met de Engelse afkorting *BMR* (Basal Metabolic Rate).
Diëtisten maken gebruik van formules om deze hoeveelheid te berekenen. Een formule van de *BMR* voor mannen luidt:

$BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6,25 \cdot L + 5$

In deze formule is G het gewicht in kg, J de leeftijd in jaren, L de lengte in cm en *BMR* in kcal.

Luuk is 1,88 meter lang en weegt 77 kg. Hij is 25 jaar oud.

2p **11** Bereken zijn *BMR*.

Marcio is in precies 1 jaar 5 kg afgevallen. Zijn lengte is niet veranderd.

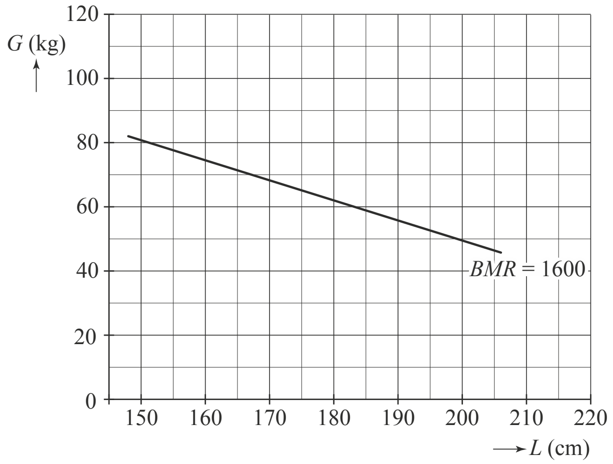
3p **12** Bereken aan de hand van de formule, zonder gebruik te maken van een getallenvoorbeeld voor G en J, hoeveel Marcio’s *BMR* in die periode van 1 jaar verminderd is.

Voor 30-jarige mannen met een *BMR* van 2000 kcal kun je het gewicht uitdrukken in de lengte. Er geldt dan $G = a \cdot L + b$, waarbij a en b getallen zijn.

3p **13** Bereken de waarden van a en b in één decimaal nauwkeurig.

In de figuur is voor 30-jarige mannen met een *BMR* van 1600 een grafiek getekend die het verband tussen G en L weergeeft. De figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur ***BMR* voor 30-jarigen**



Je kunt voor 30-jarige mannen ook bij andere *BMR*-waarden de grafiek tekenen die het verband tussen G en L weergeeft.

3p **14** Teken in de figuur op de uitwerkbijlage voor 30-jarige mannen de grafiek die hoort bij een *BMR* van 1800. Licht je werkwijze toe.

In de Verenigde Staten hanteert men soortgelijke formules maar met andere variabelen. Men gebruikt voor het gewicht de variabele W (weight) in pounds, voor de lengte de variabele H (height) in feet en voor de leeftijd in jaren de variabele Y (years). Er geldt:

$W = 2,2 \cdot G$

$Y = J$

$H = 0,033 \cdot L$

Met deze gegevens kun je de formule van *BMR* opstellen zoals die in de Verenigde Staten gebruikt wordt in de vorm

$BMR = \ldots \cdot W - 5 \cdot Y + \ldots \cdot H + 5$

Hierbij staan op de puntjes getallen.

4p **15** Bereken welke getallen op de puntjes moeten staan en rond af op één decimaal.

Lunchen

Een paar jaar geleden heeft men in de Verenigde Staten een onderzoek gehouden onder mensen die in hun lunchpauze ergens gaan eten. Men wilde weten wat er zoal als lunch besteld werd en hoeveel kilocalorieën (kcal) de bestelde lunch bevatte.

Het onderzoek werd uitgevoerd in New York City. Uit alle 1064 lunchrestaurants die op hun website calorie-informatie hadden staan, werden er willekeurig 167 uitgekozen waar het onderzoek werd uitgevoerd. Verschillende teams van onderzoekers gingen rond lunchtijd naar deze lunchrestaurants om klanten te informeren over het onderzoek. Alleen klanten van 18 jaar en ouder mochten meedoen. Ze moesten dan een individuele bestelling plaatsen. Wie vervolgens zijn kassabonnetje inleverde, kreeg als beloning een metrokaartje van 2 dollar. Vrijwel alle klanten wilden meedoen met het onderzoek, mede vanwege de beloning.
De onderzoekers kregen op deze manier heel wat kassabonnetjes in handen. Achteraf bleek dat 5,6% van de ingeleverde kassabonnetjes onbruikbaar was. De overige 7318 kassabonnetjes konden worden gebruikt voor het onderzoek.

3p **16** Bereken hoeveel dollar de onderzoekers kwijt waren aan metrokaartjes.

Omdat op de kassabonnetjes precies vermeld stond wat er besteld was, konden onderzoekers met de calorie-informatie van de betreffende lunchrestaurants berekenen hoeveel kcal elke lunch bevatte. Een samenvatting van de resultaten staat in tabel 1.

tabel 1

type lunch-restaurant	aantal restaurants	aantal geldige kassa-bonnetjes	aantal kcal per kassa-bonnetje		percentage klanten dat meer dan … kcal bestelde	
			gemiddelde	standaard-afwijking	1000 kcal	1250 kcal
broodjes	49	1989	734	361	20,0	8,8
pizza	17	272	766	449	20,6	15,1
hamburgers	75	3857	857	336	38,6	16,5
tex-mex	3	96	900	295	41,7	17,7
kip	14	649	931	264	47,5	18,0
gemengd	9	455	821	256	35,6	16,9
totaal	167	7318	827	458	33,5	14,5

Van één type lunchrestaurant uit tabel 1 zijn de resultaten ook weergegeven in een relatieve cumulatieve frequentiepolygoon. Deze polygoon staat op de uitwerkbijlage.

3p **17** Van welk type lunchrestaurant zijn de resultaten in de polygoon weergegeven? Licht je antwoord toe. Je kunt daarbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

De aanbevolen hoeveelheid kcal voor een lunch is 750 kcal. Het lijkt erop dat die hoeveelheid in hamburgerrestaurants ruimschoots overschreden wordt. Het steekproefgemiddelde was daar immers veel hoger dan 750 kcal.

3p **18** Onderzoek of de aanbevolen hoeveelheid van 750 kcal in het 95%-betrouwbaarheidsinterval van het populatiegemiddelde in hamburgerrestaurants ligt.

De Amerikaanse overheid is geschrokken van de resultaten van dit onderzoek. Ze trekt de conclusie: ‘Veel volwassenen nuttigen bij de lunch meer dan de aanbevolen hoeveelheid kcal.’

Door de gekozen onderzoeksopzet, zoals die beschreven staat in de inleiding van deze opgave, is de conclusie van de Amerikaanse overheid echter te algemeen.

2p **19** Noem hiervoor twee aspecten uit de gekozen onderzoeksopzet.

Een van de deelnemende lunchrestaurants probeert zijn klanten bewust te maken van de hoeveelheid kcal die ze bestellen. Dit restaurant presenteert daarom de calorie-informatie niet alleen op de website, maar ook duidelijk zichtbaar bij het bestelpunt. De onderzoekers hebben aan de klanten van dit restaurant gevraagd of deze informatie effect had op hun bestelling. Die informatie hebben zij per klant gekoppeld aan zijn of haar kassabonnetje. De resultaten staan in tabel 2.

tabel 2

	aantal geldige kassabonnetjes	aantal kcal		percentage dat meer dan 1000 kcal bestelt
		gemiddelde	standaardafwijking	
calorie-informatie wel gelezen	568	713	301	17,5
calorie-informatie niet gelezen	1237	766	584	23,0

Op grond van de resultaten in tabel 2 bespreken de onderzoekers de volgende stelling: ‘Er bestaat een groot verschil in het aantal kcal per bestelling tussen klanten die de calorie-informatie wel hebben gelezen en klanten die de calorie-informatie niet hebben gelezen.’

4p **20** Onderzoek met behulp van het formuleblad of deze stelling door de gegevens in tabel 2 wordt ondersteund.

Voetafdruk

De (ecologische) voetafdruk is de hoeveelheid aardoppervlak die iemand jaarlijks nodig heeft vanwege zijn manier van leven. Zo heeft iemand die veel consumeert een grotere voetafdruk dan iemand die weinig consumeert. Deze voetafdruk wordt uitgedrukt in mha (mondiale hectares), waarbij mha staat voor een hectare aardoppervlak die gebruikt kan worden voor onder andere landbouw, visserij of industrie.

Als de totale voetafdruk van alle mensen op de wereld 10 miljard mha (of minder) is, dan heeft de aarde voldoende mogelijkheid om zichzelf te herstellen. Is de totale voetafdruk meer dan 10 miljard mha, dan zal de aarde op den duur uitgeput raken.

Al sinds lange tijd neemt zowel de wereldbevolking als de totale voetafdruk toe. In 1974 kwam de totale voetafdruk al boven de genoemde grens van 10 miljard mha uit. In 2010 bestond de wereldbevolking uit 6,9 miljard mensen en was de gemiddelde voetafdruk per persoon 2,85 mha. De totale voetafdruk in 2010 was dus 6,9 miljard $\times$ 2,85 $\approx$ 19,7 miljard mha.

Vanaf 2010 zijn er maatregelen getroffen om ervoor te zorgen dat de totale voetafdruk op termijn weer onder de 10 miljard mha komt.

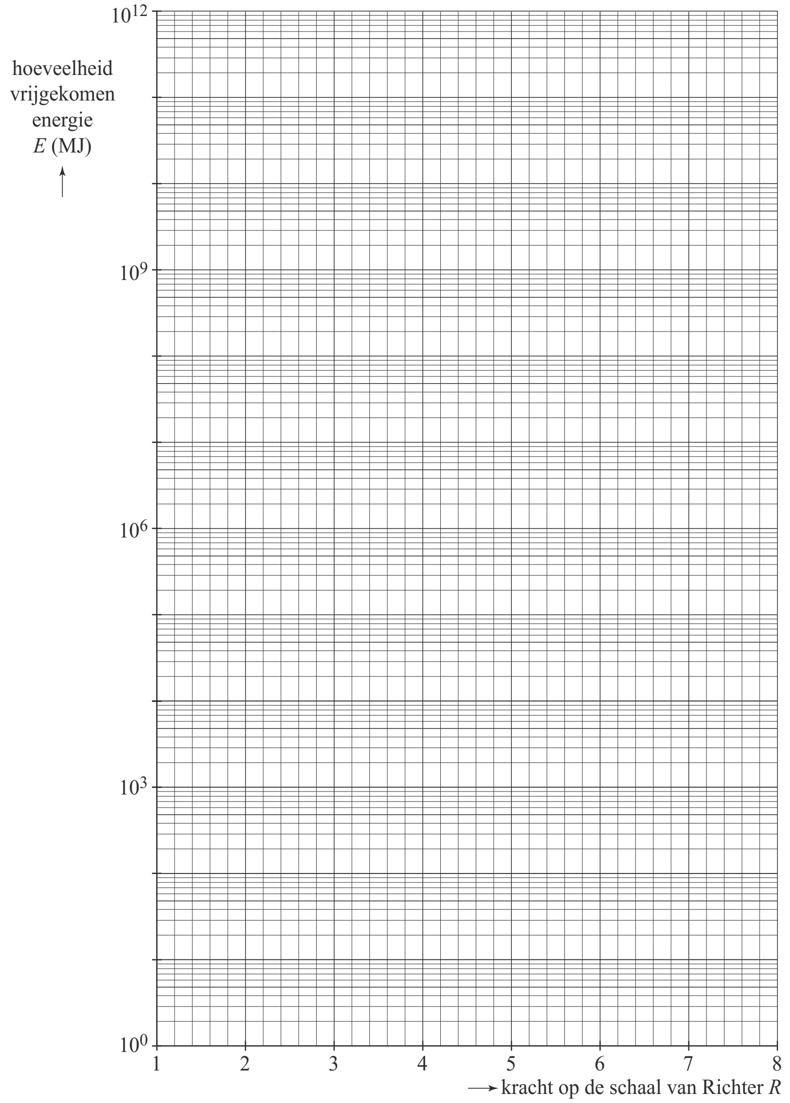
We doen de volgende aannames voor de periode 2010 – 2050:
- Vanaf 2010 neemt de gemiddelde voetafdruk per persoon af met 0,11 mha per jaar, totdat een gemiddelde voetafdruk per persoon van 1,20 mha bereikt is. De jaren daarna blijft de gemiddelde voetafdruk per persoon 1,20 mha.
- De wereldbevolking neemt elk jaar toe met 0,7%.

De gemiddelde voetafdruk neemt dus af (tot 1,20 mha), maar de wereldbevolking neemt toe. Het is daarom de vraag of de genomen maatregelen voldoende zijn om de totale voetafdruk te laten dalen tot onder de 10 miljard mha. Dit blijkt een aantal jaren het geval te zijn, maar na verloop van tijd komt de totale voetafdruk toch weer boven de 10 miljard mha.

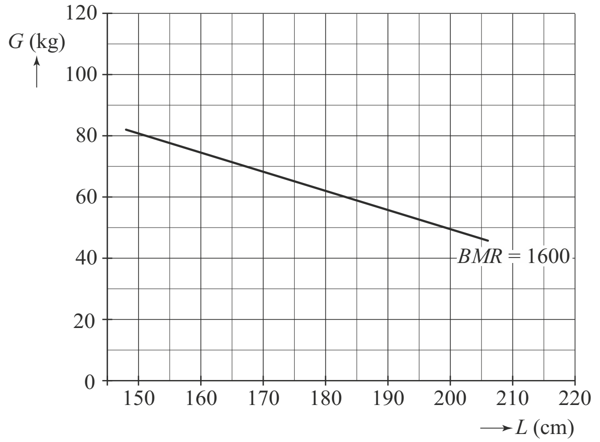
8p **21** Onderzoek in welke jaren in de periode 2010 – 2050 de totale voetafdruk minder dan 10 miljard mha is.

Uitwerkbijlage bij de vragen 10, 14 en 17

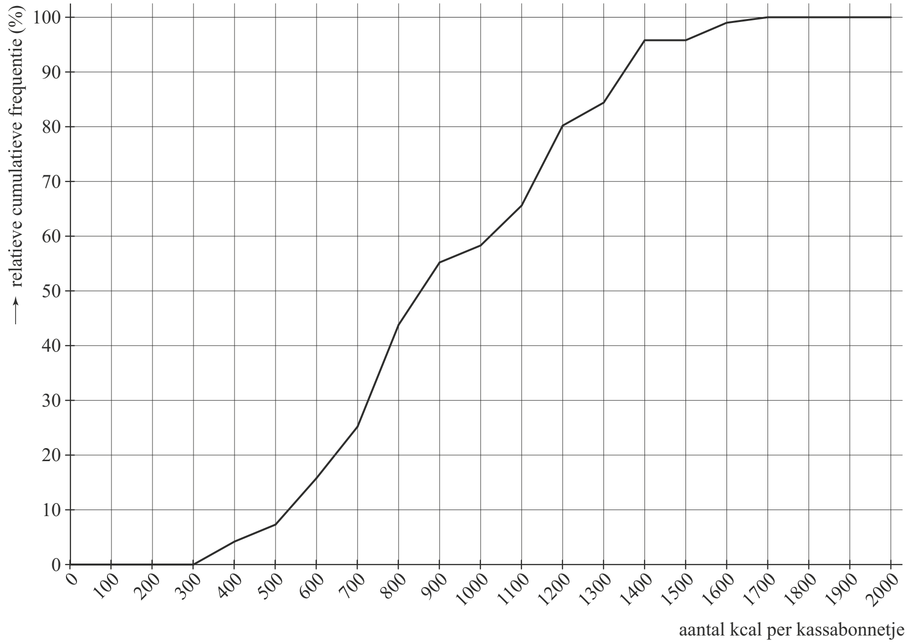
10



14



17



Hints bij examen 2018-I

1 De minimale en de maximale waarde van de Angström Index wordt gevraagd. Bedenk voor welke waarde van *V* dit het geval is.

2 Een zeer groot risico op bosbrand (zie tabel 1). Bedenk welke vergelijking eerst opgelost moet worden.

3 *T* is een constante en *V* neemt af. Geef per deel van de formule aan of er sprake is van toename, afname, constante waarde.

4 $V = 43$ invullen in de formule. Herschrijf daarna de formule tot de gevraagde vorm.

5 Zoek een waarde voor *V* waarbij de uitkomst van I_A kleiner is dan 2 en de uitkomst van I_C kleiner dan 50.

6 De referentiewaarden liggen symmetrisch om het gemiddelde. Bedenk welke vuistregels je voor de normale verdeling kent.

7 Het gaat om het vergelijken van twee groepen. Gebruik het formuleblad bij je examen en bekijk welke formule je kunt gebruiken met de gegevens die bekend zijn.

8 Bedenk dat het om exponentiële toename gaat.

9 Bereken eerst de energie die vrijkwam bij de zware nachtelijke aardbeving.

10 Er is gegeven dat de grafiek een rechte lijn is. Het is dus voldoende om twee punten te berekenen.

11 Vul de gegeven waarden in. Let op de eenheden.

12 Beredeneer met behulp van de formule (zonder getallenvoorbeeld) wat de invloed is van de gewichtsafname en de leeftijdstoename.

13 Vul de gegevens in en herschrijf de formule tot de gevraagde vorm.

14 Bereken twee punten van de te tekenen lijn.

15 Herschrijf de gegevens en substitueer dit in $BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6{,}25 \cdot L + 5$.

16 5,6% is onbruikbaar, dus 94,4% is wel bruikbaar. Bereken met de gegevens hoeveel 100% is.

17 Het is een cumulatief frequentiepolygoon. Lees af hoeveel procent minder dan 1000 kcal en hoeveel procent minder dan 1250 kcal gebruikt en combineer dit met de tabel.

18 Gebruik de formulekaart voor het 95% betrouwbaarheidsinterval.

19 Lees de tekst vanaf het begin door en kies twee aspecten uit de tekst waarbij het niet om een aselecte steekproef onder alle lunchgebruikers gaat.

20 Gebruik de formulekaart en kies een formule die je kunt gebruiken om deze twee groepen te vergelijken.

21 Noteer alle gegevens en bereken voor een aantal jaren de totale voetafdruk. Maak eventueel gebruik van de formules voor de wereldbevolking en voor de gemiddelde voetafdruk. De wereldbevolking stijgt exponentieel met 0,7% per jaar en de gemiddelde voetafdruk daalt lineair met 0,11 per jaar totdat deze gelijk is aan 1,2.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2018-I

Brandgevaar

3p **1** *De minimale en de maximale waarde van I_A wordt gevraagd.*

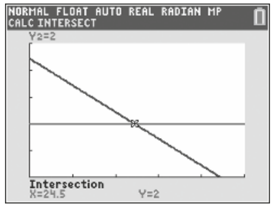
De Angström Index is $I_A = \frac{V}{20} + \frac{27 - T}{10}$ en de temperatuur $T = 24$ °C

V is de luchtvochtigheid in procenten, dus minimaal $V = 0\%$ en maximaal $V = 100\%$ [1p]

I_A is minimaal voor $V = 0$: $I_A = \frac{0}{20} + \frac{27 - 24}{10} = 0{,}3$ [1p]

I_A is maximaal voor $V = 100$: $I_A = \frac{100}{20} + \frac{27 - 24}{10} = 5{,}3$ [1p]

5p **2** *Een zeer groot risico op bosbrand, kijk in de tabel voor de waarde van I_A.*
Er is een zeer groot risico op bosbrand als $I_A < 2$ [1p]
De relatieve luchtvochtigheid $V = 35$



Dus opgelost moet worden: $I_A = \frac{35}{20} + \frac{27 - T}{10} < 2$

$\frac{35}{20} + \frac{27 - T}{10} = 2$ [1p]

Oplossen met de grafische rekenmachine:

$y_1 = \frac{35}{20} + \frac{27 - x}{10}$ en $y_2 = 2$; calc intersect [1p] geeft $x = 24{,}5$ [1p]

Of algebraïsch oplossen:

$\frac{35}{20} + \frac{27 - T}{10} = 2$ [1p] dus $\frac{27 - T}{10} = \frac{5}{20}$ dus $\frac{54 - 2T}{20} = \frac{5}{20}$ dus $54 - 2T = 5$ dus $2T = 49$
dus $T = 24{,}5$ [2p]

Conclusie: voor temperaturen hoger dan 24,5 °C is er een zeer groot risico op bosbrand. [1p]
Opmerking: bij 24,5 °C is I_A gelijk aan 2, dan is er een groot risico. Dus alleen waarden hoger dan 24,5 °C zijn goed.

3p **3** *De temperatuur T is constant en de relatieve vochtigheid V neemt af.*

$I_A = \frac{V}{20} + \frac{27 - T}{10} = \frac{V}{20} + \frac{27 - T_{constant}}{10}$

$\frac{V}{20}$ neemt af als *V* afneemt en $\frac{27 - T_{constant}}{10}$ is constant dus I_A neemt af als *V* afneemt. [2p]

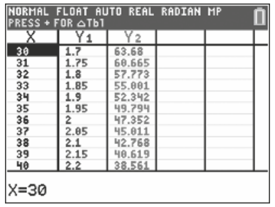
Als I_A afneemt, dus kleiner wordt, dan neemt het risico op bosbrand toe. [1p]
Conclusie: de formule is in overeenstemming met "als *V* toeneemt, neemt het risico op bosbrand toe".

4p **4** *$V = 43$ is gegeven. Herschrijf de formule.*
$I_C = (216 - 2{,}84 \cdot V + 1{,}12 \cdot T) \cdot 0{,}97^V = (216 - 2{,}84 \cdot 43 + 1{,}12 \cdot T) \cdot 0{,}97^{43} =$ [1p]
$I_C = (93{,}88 + 1{,}12 \cdot T) \cdot 0{,}2698...$ [1p] $= 25{,}337... + 0{,}302... \cdot T$ [1p]
afgerond op twee decimalen: $I_C = 25{,}34 + 0{,}30T$ [1p]

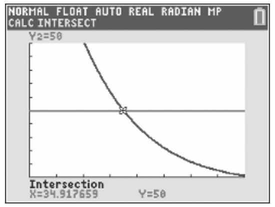
© ThiemeMeulenhoff

5p **5** *Onderzoek met een getallenvoorbeeld of het mogelijk is dat de Angström Index zeer groot is en de Chandler Burning Index klein. De Angström Index is zeer groot als $I_A < 2$ en de Chandeler Index is zeer klein als $I_C < 50$.*

eerste manier, met een getallenvoorbeeld:
$I_A = 0{,}05 \cdot V + 0{,}2$ moet kleiner worden dan 2 en $I_C = (244 - 2{,}84 \cdot V) \cdot 0{,}97^V$ moet kleiner worden dan 50.
Probeer een aantal waarden voor V, gebruik evt. een tabel om de juiste waarde te vinden (zie print screen waarbij $y_1 = I_A$ en $y_2 = I_C$).
Voor $V = 35$ geldt: $I_A = 0{,}05 \cdot 35 + 0{,}2 = 1{,}95$ [1p] en dus een zeer groot risico volgens Angström Index (tabel 1) [1p] en voor $V = 35$ geldt: $I_C = (244 - 2{,}84 \cdot 35) \cdot 0{,}97^{35} = 49{,}7...$ [1p] en dus een zeer klein risico volgens Chandler Burning Index (tabel 2). [1p]
Conclusie: het is mogelijk dat volgens de Angström Index het risico zeer groot is en volgens de Chandler Burning Index het risico zeer klein. [1p]



tweede manier, met een ongelijkheid:
zeer groot risico volgens Angström Index
dus $I_A = 0{,}05 \cdot V + 0{,}2$ moet kleiner worden dan 2. [1p]
$0{,}05 \cdot V + 0{,}2 < 2$ dus $0{,}05 \cdot V < 1{,}8$ dus voor $V < 36$. [1p]
zeer klein risico volgens Chandler Burning Index
dus $I_C = (244 - 2{,}84 \cdot V) \cdot 0{,}97^V$ moet kleiner worden dan 50. [1p]
$I_C = (244 - 2{,}84 \cdot V) \cdot 0{,}97^V = 50$.
Oplossen met de grafische rekenmachine:
$y_1 = (244 - 2{,}84 \cdot x) \cdot 0{,}97^x$ en $y_2 = 50$ en calc intersect geeft $x = 34{,}9...$.
Dus voor $V > 34{,}9...$ geldt volgens de Chandler Burning Index een zeer klein risico. [1p]
Conclusie: voor waarden van V tussen 34,9 en 36 is het mogelijk dat volgens de Angström Index het risico zeer groot is en volgens de Chandler Burning Index zeer klein. [1p]



Referentiewaarden

3p **6** *Voor de normale verdeling geldt dat 95% van alle waarden ligt tussen $\mu - 2\sigma$ en $\mu + 2\sigma$.*

eerste manier:
Voor gezonde vrouwen ligt 95% van de rode bloedcellen tussen 4,0 en 5,3. [1p]
Het gemiddelde is $\frac{4{,}0 + 5{,}3}{2} = 4{,}65$, dus $4{,}65 - 2\sigma = 4{,}0$ (of $4{,}65 + 2\sigma = 5{,}3$). [1p]
2 keer de standaarddeviatie is 4,65 – 4,0 = 0,65, dus de standaarddeviatie is 0,325.
Conclusie: afgerond is de standaarddeviatie 0,3 biljoen per liter. [1p]

tweede manier:
Voor gezonde vrouwen ligt 95% van de rode bloedcellen tussen 4,0 en 5,3. [1p]
Dus 4 keer de standaarddeviatie is 5,3 – 4,65 = 1,3, [1p] dus de standaarddeviatie is 0,325.
Conclusie: afgerond is de standaarddeviatie 0,3 biljoen per liter. [1p]

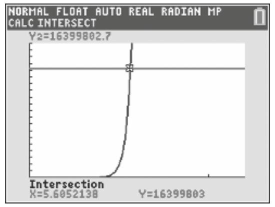
© ThiemeMeulenhoff

4p **7** *Gebruik het formuleblad, dus bekijk welke gegevens je hebt en welke formule toegepast kan worden.*
Voor het hemoglobinegehalte geldt:
standaarddeviatie = 0,6
gemiddelde van de mannen is $\frac{8{,}6 + 11{,}0}{2} = 9{,}8$
gemiddelde van de vrouwen is $\frac{7{,}6 + 10{,}0}{2} = 8{,}8$ [1p]
de effectgrootte [1p] $E = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)} = \frac{9{,}8 - 8{,}8}{\frac{1}{2}(0{,}6 + 0{,}6)} = 1{,}666...$ [1p] $> 0{,}8$ (zie formuleblad).
Conclusie: het verschil is groot. [1p]

De aardbeving van l'Aquila

3p **8** *De vuistregel: als de kracht van Richter met 1 toeneemt, dan wordt de hoeveelheid vrijgekomen energie 30 keer zo groot. De toename is exponentieel.*
De kracht van de aardbevingen neemt toe van 3,3 naar 6,3 op de schaal van Richter, dus een toename van 3,0. [1p]
Bij een toename van 1 wordt de hoeveelheid vrijgekomen energie 30 keer zo groot, dus bij een toename van 3 wordt dit $30^3 = 27\,000$ keer zo groot. [2p]

5p **9** *De hoeveelheid energie is 9% van de hoeveelheid die bij de zware nachtelijke aardbeving vrijkwam.*
De energie die vrijkwam bij de zware nachtelijke aardbeving is $E = 0{,}06 \cdot 32^{6{,}3} = 182\,220\,030$ [1p]
9% van 182 220 030 is gelijk aan $0{,}09 \cdot 182\,220\,030 = 16\,399\,802{,}7$ [1p]
De vergelijking $E = 0{,}06 \cdot 32^R = 16\,399\,802{,}7$ moet worden opgelost. [1p]
Met de grafische rekenmachine:
$y_1 = 0{,}06 \cdot 32^x$ en $y_2 = 16\,399\,802{,}7$
Intersect [1p] geeft $x \approx 5{,}6$
Conclusie: de naschok had een kracht van 5,6 op de schaal van Richter. [1p]



3p **10** *De grafiek is een rechte lijn, dus het berekenen van twee punten is voldoende.*
$R = 1$ geeft $E = 0{,}06 \cdot 32^1 = 1{,}92$ dus de grafiek gaat door (1; 1,92) [1p]
$R = 8$ geeft $E = 0{,}06 \cdot 32^8 \approx 6{,}597 \cdot 10^{10}$ dus de grafiek gaat door $(8; 6{,}6 \cdot 10^{10})$ [1p voor het punt en 1p voor het tekenen van de rechte lijn]

BMR

2p **11** Luuk is 1,88 meter lang, weegt 77 kg en is 25 jaar oud, dus $G = 77$, $J = 25$ en $L = 188$ (cm).
$BMR = 10 \cdot 77 - 5 \cdot 25 + 6{,}25 \cdot 188 + 5 = 1825$ [2p]

3p **12** *Bereken zonder gebruik te maken van een getallenvoorbeeld.*
$BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6{,}25 \cdot L + 5$
Marcio is in precies 1 jaar 5 kg afgevallen en zijn lengte is niet veranderd.
Zijn gewicht G neemt met 5 kg af, dus zijn BMR neemt met $10 \cdot G = 10 \cdot 5 = 50$ af. [1p]
Zijn leeftijd J neemt met 1 toe, dus zijn $BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6{,}25 \cdot L + 5$ neemt met $5 \cdot J = 5 \cdot 1 = 5$ af. [1p]
Conclusie: totaal is zijn BMR met 55 kcal afgenomen. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

3p **13** *Bekend zijn leeftijd $J = 30$ en $BMR = 2000$ kcal.*

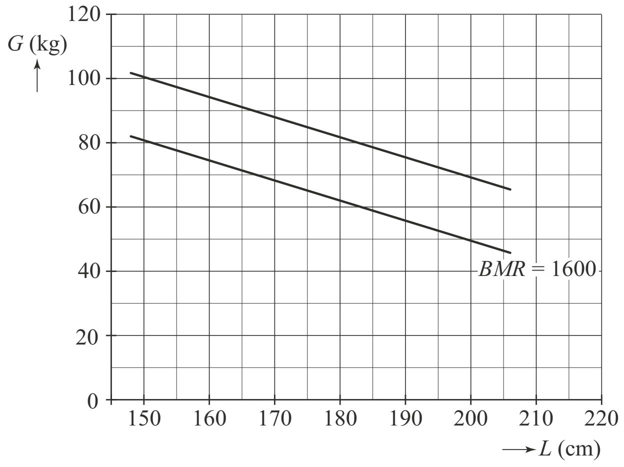
eerste manier, door de formule te herschrijven:
$BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6{,}25 \cdot L + 5$ wordt $2000 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6{,}25 \cdot L + 5$ [1p]
dus $2000 = 10 \cdot G + 6{,}25 \cdot L - 145$
dus $-10 \cdot G = 6{,}25 \cdot L - 2145$ dus $G = -0{,}625 \cdot L + 214{,}5$ [1p]
a en b afronden op één decimaal nauwkeurig.
Conclusie: $G = -0{,}6 \cdot L + 214{,}5$ dus $a = -0{,}6$ en $b = 214{,}5$ [1p]

tweede manier, door twee punten van de lijn te berekenen en de vergelijking van de lijn op te stellen:
$BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6{,}25 \cdot L + 5$ wordt $2000 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6{,}25 \cdot L + 5$
Kies bijvoorbeeld $L = 160$ geeft $2000 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6{,}25 \cdot 160 + 5$ dus
$2000 = 10 \cdot G + 855$ dus $G = 114{,}5$ en
$L = 200$ geeft $2000 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6{,}25 \cdot 200 + 5$ dus $2000 = 10 \cdot G + 1105$ dus $G = 89{,}5$
De lijn $G = a \cdot L + b$ gaat o.a. door (160; 114,5) en (200; 89,5) [1p]
$a = \frac{89{,}5 - 114{,}5}{200 - 160} = -0{,}625$ [1p] dus $G = -0{,}625 \cdot L + b$
punt (200; 89,5) invullen geeft $89{,}5 = -0{,}625 \cdot 200 + b$ dus $b = 214{,}5$ [1p]
a en b afronden op één decimaal nauwkeurig.
Conclusie: $a = -0{,}6$ en $b = 214{,}5$

3p **14** *Gegeven $BMR = 1800$ kcal en 30-jarige mannen dus $J = 30$.*

eerste manier, door de formule te herschrijven:
$BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6{,}25 \cdot L + 5$ wordt
$1800 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6{,}25 \cdot L + 5$
dus $1800 = 10 \cdot G + 6{,}25 \cdot L - 145$
dus $-10 \cdot G = 6{,}25 \cdot L - 1945$, dus $G = -0{,}625 \cdot L + 194{,}5$
De grafiek gaat bijv. door (160; 94,5) en (200; 69,5) [2p voor de twee waarden en 1p voor de grafiek]

tweede manier, door de formule te vergelijken met die van de getekende grafiek:
De getekende grafiek hoort bij
$1600 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6{,}25 \cdot L + 5$
dus $1600 = 10 \cdot G + 6{,}25 \cdot L - 145$, dus
$G = -0{,}625 \cdot L + 174{,}5$
De te tekenen grafiek hoort bij $1800 = 10 \cdot G - 5 \cdot 30 + 6{,}25 \cdot L + 5$
dus $1800 = 10 \cdot G + 6{,}25 \cdot L - 145$, dus $-10 \cdot G = 6{,}25 \cdot L - 1945$, dus $G = -0{,}625 \cdot L + 194{,}5$
De grafiek bij $BMR = 1800$ is evenwijdig aan de getekende grafiek en ligt
$194{,}5 - 174{,}5 = 20$ hoger. [2p voor de uitleg en 1p voor de grafiek]



© ThiemeMeulenhoff

4p **15** *Herschrijf de gegevens, zodat ze te substitueren zijn in de gegeven formule voor BMR.*
$W = 2{,}2 \cdot G$, dus $G = \frac{1}{2{,}2} \cdot W$ [1p]
$J = Y$
$H = 0{,}033 \cdot L$ dus $L = \frac{1}{0{,}033} \cdot H$ [1p]
Substitueren in $BMR = 10 \cdot G - 5 \cdot J + 6{,}25 \cdot L + 5$ geeft
$BMR = 10 \cdot \frac{1}{2{,}2} \cdot W - 5 \cdot Y + 6{,}25 \cdot \frac{1}{0{,}033} \cdot H + 5 = 4{,}54... \cdot W - 5 \cdot Y + 189{,}39... \cdot H + 5$ [1p]
dus afgerond op één decimaal $BMR = 4{,}5 \cdot W - 5 \cdot Y + 189{,}4 \cdot H + 5$ [1p]

Lunchen

3p **16** *5,6% van de kassabonnetjes was onbruikbaar, 7318 kassabonnetjes waren wel bruikbaar. De beloning was 2 dollar voor elk kassabonnetje, ook de niet bruikbare.*
100 – 5,6 = 94,4% van de kassabonnetjes is bruikbaar, dit zijn er 7318. [1p]

7318	?
94,4%	100%

100% is $\frac{7318}{94{,}4} \cdot 100 = 7752{,}1\ldots$ In totaal zijn er 7752 kassabonnetjes ingeleverd. [1p]
Conclusie: de onderzoekers waren $7752 \cdot 2 = 15\,504$ dollar kwijt. [1p]

3p **17** *In de tabel staan veel gegevens. Bedenk welke gegevens te gebruiken zijn voor het cumulatieve frequentiepolygoon.*
Bekend is het percentage klanten dat meer dan 1000 kcal en meer dan 2000 kcal bestelde (laatste 2 kolommen in de tabel).
In de grafiek is af te lezen:
Ongeveer 58% gebruikt minder dan 1000 kcal, dus 42% gebruikt meer dan 1000 kcal. [1p]
Ongeveer 82% gebruikt minder dan 1250 kcal, dus 18% gebruikt meer dan 1250 kcal. [1p]
Deze waarden komen het beste overeen met lunchrestaurant tex-mex. [1p]
Er wordt niet gesproken over een normale verdeling, vandaar dat het aflezen van gemiddelde en standaarddeviatie in de grafiek van de relatieve cumulatieve frequentie hier niet van toepassing is.

3p **18** *Gebruik de formulekaart voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval.*
Bekend zijn gemiddelde = 857, standaardafwijking = 336 en aantal bonnetjes (steekproefomvang) = 3857
95% betrouwbaarheidsinterval: $\overline{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 857 \pm 2 \cdot \frac{336}{\sqrt{3857}} \approx 857 \pm 10{,}82$ [1p]
Dus de ondergrens is 857 – 10, 82 = 846,18 en de bovengrens is 857 + 10,82 = 867,82 [1p]
Conclusie: 750 kcal ligt niet in het 95% betrouwbaarheidsinterval. [1p]

2p **19** *Er wordt gevraagd naar twee aspecten waardoor het onderzoeksrapport te algemeen is. Gebruik gegevens uit de tekst. Het noemen van twee van onderstaande aspecten is voldoende.*
Het onderzoek werd uitgevoerd in New York City. Dit is een beperkte steekproef voor heel Amerika.
Het onderzoek werd uitgevoerd bij restaurants die calorie-informatie op hun website hadden staan. Dus alle andere restaurants werden buiten beschouwing gelaten.
Het onderzoek werd gehouden in lunchrestaurants, dus alleen onder personen die een lunch in een restaurant kopen. Hierdoor worden de personen die zelf een lunch meenemen of niet lunchen niet meegenomen in het onderzoek. [2p]

© ThiemeMeulenhoff

4p **20** *Het gaat om het vergelijken van twee groepen. Gebruik de formulekaart.*
Per groep is het gemiddelde, de standaarddeviatie, de steeproefgrootte en het percentage dat meer dan 1000 kcal bestelt bekend.

eerste manier, met behulp van de Effectgrootte: [1p]

$E = \dfrac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)} = \dfrac{766 - 713}{\frac{1}{2}(584 + 301)} = 0{,}119...$ [1p] $\leq 0{,}4$ dus het verschil is gering (zie formuleblad). [1p]

Conclusie: het verschil is gering en de stelling wordt niet ondersteund door tabel 2. [1p]

tweede manier, met behulp van een kruistabel, gebruik de informatie uit de laatste kolom:
Calorie-informatie wel gelezen: 17,5% van de 568 is 99,4, oftewel 99 personen hebben meer dan 1000 kcal besteld en dus
568 – 99 = 469 hebben 1000 of minder kcal besteld.
Calorie-informatie niet gelezen: 23% van de 1237 is 284,51, oftewel 285 personen hebben meer dan 1000 kcal besteld en dus
1237 – 285 = 952 hebben 1000 of minder kcal besteld.
Deze getallen weergegeven in een kruistabel: [1p]

	bestelling in kcal	
	> 1000	≤ 1000
informatie wel gelezen	99	469
informatie niet gelezen	285	952

$phi = \dfrac{99 \cdot 952 - 469 \cdot 285}{\sqrt{(99 + 469) \cdot (99 + 285) \cdot (469 + 952) \cdot (285 + 952)}} = \dfrac{-39\,417}{619\,186{,}7707} = -0{,}06...$ (zie formuleblad). [1p]

$-0{,}2 \leq -0{,}06 \leq 0{,}2$ dus het verschil is gering. [1p]
Conclusie: de stelling wordt niet ondersteund door tabel 2, want het verschil is gering. [1p]

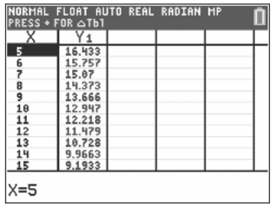
Voetafdruk

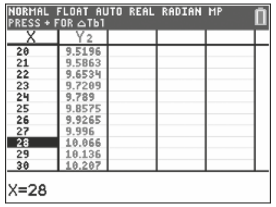
8p **21** Gegevens uit de opgave
1 2010: wereldbevolking = 6,9 miljard.
De gemiddelde voetafdruk is 2,85 mha.
Totale voetafdruk in 2010 is 2,85 · 6,9 miljard = 19,7 miljard mha.
2 Vanaf 2010 neemt de gemiddelde voetafdruk per persoon af met 0,11 mha per jaar totdat de gemiddelde voetafdruk 1,20 mha is. Daarna blijft de gemiddelde voetafdruk 1,20 mha.
3 De wereldbevolking neemt elk jaar met 0,7% toe.

Gevraagd wordt in welke jaren in de periode 2010 – 2050 de totale voetafdruk minder dan 10 miljard mha is.
De totale voetafdruk = gemiddelde voetafdruk × wereldbevolking.

eerste manier, met formules:
Neem 2010 $t = 0$ met t in jaren.
De gemiddelde voetafdruk = $2{,}85 - 0{,}11 \cdot t$ tot de waarde 1,20 wordt bereikt. [1p]
$2{,}85 - 0{,}11 \cdot t = 1{,}20$ dus $0{,}11 \cdot t = 1{,}65$ dus $t = 15$ [1p]
Gemiddelde voetafdruk = $2{,}85 - 0{,}11 \cdot t$ voor $t \leq 15$ (dus tot en met jaar 2025).
Vanaf $t = 15$ geldt gemiddelde voetafdruk = 1,20.
Wereldbevolking = $6{,}9 \cdot 1{,}007^t$ miljard [1p]
Formule voor de totale voetafdruk TV:
$TV = (2{,}85 - 0{,}11 \cdot t) \cdot 6{,}9 \cdot 1{,}007^t$ miljard voor $t \leq 15$
$TV = (1{,}20) \cdot 6{,}9 \cdot 1{,}007^t$ miljard voor $t > 15$

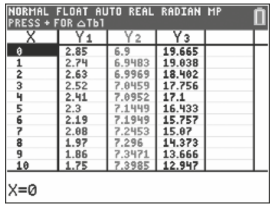
Los op wanneer $TV < 10$ miljard met de grafische rekenmachine bijvoorbeeld met een tabel. [2p]
$y_1 = (2{,}85 - 0{,}11 \cdot t) \cdot 6{,}9 \cdot 1{,}007^x < 10$ voor $t = 14$ en $t = 15$ (zie schermafbeelding). [1p]
$y_2 = (1{,}20) \cdot 6{,}9 \cdot 1{,}007^x < 10$ voor $t = 16$ t/m $t = 27$ [1p]





Conclusie: van 2024 tot en met 2037 is de totale voetafdruk minder dan 10 miljard mha. [1p]

tweede manier, maak een tabel met daarin voor enkele jaren de totale voetafdruk, zodat alle jaren met een totale voetafdruk minder dan 10 miljard mha af te lezen zijn:
Neem bijvoorbeeld $t = 0$ is 2010, voer de formules
$y_1 = 2{,}85 - 0{,}11 \cdot x$ [1p]
$y_2 = 6{,}9 \cdot 1{,}007^x$ [1p] en
$y_3 = y_1 \cdot y_2$ in de grafische rekenmachine in en gebruik de tabel. [1p]



t	jaar	gemiddelde voetafdruk in mha = y_1	wereldbevolking in miljard = y_2	totale voetafdruk in miljard mha = y_3
0	2010	2,85	6,9	$2{,}85 \cdot 6{,}9 \approx 19{,}665$
1	2011	$2{,}85 - 0{,}11 = 2{,}74$	$6{,}9 \cdot 1{,}007 = 6{,}9483$	$2{,}74 \cdot 6{,}9483 \approx 19{,}038$
…				
13	2023	$2{,}85 - 13 \cdot 0{,}11 = 1{,}42$	$6{,}9 \cdot 1{,}007^{13} = 7{,}555$	10,728
14	2024	1,31	7,6078	9,9663
15	2025	1,2	7,7711	9,1933

Vanaf $t = 15$ dus vanaf 2025 blijft de gemiddelde voetafdruk 1,2 en de wereldbevolking blijft toenemen met 0,7%.
Zie onderstaande tabel. [4p]

t	jaar	gemiddelde voetafdruk in mha	wereldbevolking in miljard	totale voetafdruk in miljard mha
16	2026	1,2	$6{,}9 \cdot 1{,}007^{16} = 7{,}7147$	$1{,}2 \cdot 7{,}7147 \approx 9{,}2577$
17	2027	1,2	7,7687	9,3225
…				
26	2036	1,2	8,2721	9,9265
27	2037	1,2	8,33	9,996
28	2038	1,2	8,3883	10,066

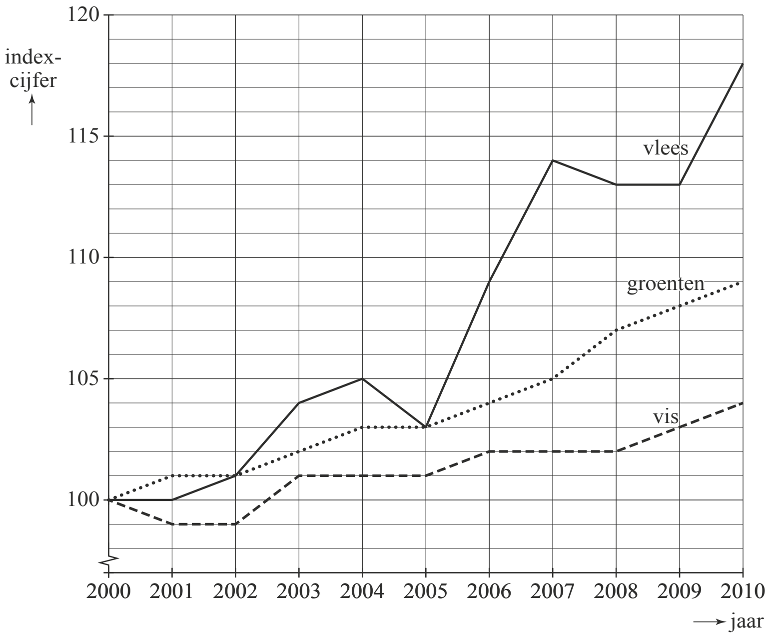
Conclusie: van 2024 tot en met 2037 is de totale voetafdruk minder dan 10 miljard mha. [1p]

Examen 2018-II

Voedingsmiddelen

Voedingsmiddelen worden in China steeds duurder. Om de prijzen over de jaren heen te kunnen vergelijken, worden ze vaak vergeleken met de prijs in een bepaald basisjaar. In deze opgave is het jaar 2000 het basisjaar. De prijs van een voedingsmiddel, bijvoorbeeld vis, duiden we in dat basisjaar aan met het getal 100. We zeggen: het **indexcijfer** van vis is in 2000 gelijk aan 100. In de figuur zie je dat het indexcijfer van vis in 2010 gelijk is aan 104. Dat betekent dat in 2010 vis $\frac{104}{100} = 1{,}04$ keer zo duur is als in 2000. Anders gezegd: in 2010 was vis 4% duurder dan in 2000.

figuur



In de periode 2006 – 2010 is het indexcijfer van vlees met 9 gestegen. Dat hoeft niet te betekenen dat de prijs van vlees met 9% is gestegen.

3p **1** Bereken met hoeveel procent de prijs van vlees in deze periode dan wel is gestegen. Rond je antwoord af op een geheel getal.

De grafiek van het indexcijfer van groenten in de periode 2005 – 2010 is bij benadering een rechte lijn. Je kunt op basis van de indexcijfers van 2005 en 2010 het indexcijfer van groenten in 2021 schatten door middel van lineair extrapoleren.

3p **2** Bereken op deze manier het indexcijfer van groenten in 2021. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Niet alleen de prijzen van vlees, vis en groenten zijn gestegen. Ook de consumptie van deze voedingsmiddelen is gestegen.
Zo is bijvoorbeeld de gemiddelde jaarlijkse vleesconsumptie per persoon in China in de periode 1985 – 2005 verdrievoudigd tot 45 kg. Neem aan dat deze groei exponentieel verliep.

4p **3** Bereken met hoeveel procent per jaar deze gemiddelde jaarlijkse vleesconsumptie per persoon in de periode 1985 – 2005 toenam. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Besmettelijke ziektes

Sommige ziektes zijn besmettelijk. Als je aan zo'n besmettelijke ziekte lijdt, kun je gezonde personen besmetten, waardoor die ook ziek worden. Van veel ziektes is bekend hoe groot het gemiddelde aantal (gezonde) personen is dat door één zieke wordt besmet. Dat gemiddelde aantal noemen we B. Zo geldt bijvoorbeeld voor de ziekte griep: $B = 2{,}2$.

In deze opgave maken we de volgende aannames:

- Iemand die ziek wordt, is precies één week ziek. Daarna is hij weer gezond (maar kan vervolgens wel weer ziek worden). Alleen in die ene week dat hij ziek is, besmet hij andere personen.
- Wie besmet wordt, zal pas in de week erna ziek zijn.

Stel bijvoorbeeld dat in week 50 van een bepaald jaar één persoon een ziekte heeft met $B = 3$. In week 51 zal die persoon weer gezond zijn, maar zullen drie andere personen ziek zijn. In week 52 zullen er negen andere personen ziek zijn, omdat elk van de drie zieken van week 51 drie andere personen heeft besmet.

In de praktijk besmet een zieke vaak minder personen dan het gemiddelde aantal B, omdat tegen een aantal ziektes vaccins zijn ontwikkeld. Als je met zo'n vaccin bent ingeënt, kun je de ziekte niet meer krijgen. Vaccinatie van een deel van de bevolking leidt ertoe dat het gemiddelde aantal personen dat door één zieke wordt besmet, kleiner is dan B. We noemen dit gemiddelde aantal B_v.

Dus:

- B is het gemiddelde aantal personen dat besmet wordt door één zieke als niemand gevaccineerd zou worden.
- B_v is het gemiddelde aantal personen dat besmet wordt door één zieke als er sprake is van vaccinatie van een deel van de bevolking.

In deze opgave gebruiken we de volgende formule om B_v te bepalen:

$$B_v = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \qquad \text{(formule 1)}$$

Hierin is p de **vaccinatiegraad**: het percentage van de bevolking dat tegen de ziekte is gevaccineerd.

Bij elke ziekte zorgt een hogere vaccinatiegraad ervoor dat een kleiner aantal personen besmet wordt.

3p **4** Beredeneer dit aan de hand van formule 1, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken.

Een situatie waarbij B_v groter is dan 1, is onwenselijk: in zo'n geval zal het aantal zieken elke week groter zijn dan het aantal zieken in de week daarvóór. We zeggen dan: de ziekte **breidt zich uit**.

Voor griep geldt $B = 2{,}2$.

3p **5** Bereken met behulp van formule 1 hoe hoog de vaccinatiegraad tegen griep minimaal moet zijn om ervoor te zorgen dat deze ziekte zich niet uitbreidt. Rond je antwoord af op een geheel getal.

Van de Nederlandse bevolking heeft 14% zich laten vaccineren tegen griep. Stel dat er 1000 personen in week 40 griep hebben. Je kunt berekenen hoeveel personen met griep er in week 46 zullen zijn. Dat aantal is minder dan wanneer niemand tegen griep zou zijn gevaccineerd.

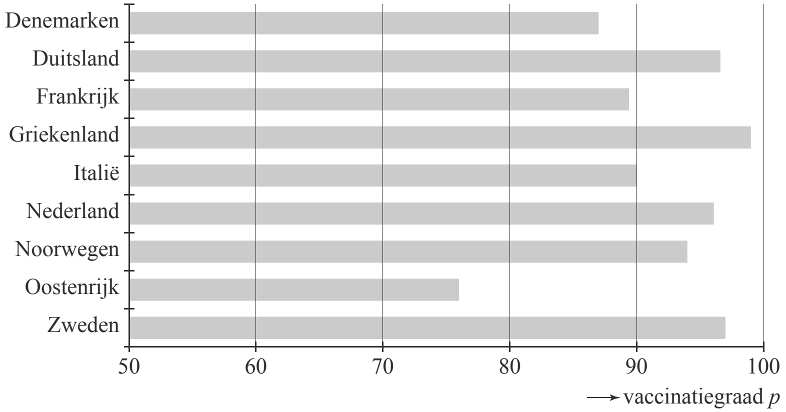
5p **6** Bereken hoeveel procent dat minder is. Rond je antwoord af op een geheel getal.

In een situatie waarbij $B_v = 1$ kan formule 1 herleid worden tot de volgende formule:

$$p = 100 - \frac{100}{B} \qquad \text{(formule 2)}$$

4p **7** Laat deze herleiding zien.

De ziekte mazelen is veel besmettelijker en gevaarlijker dan griep. Als niemand zich laat vaccineren, besmet één persoon met mazelen gemiddeld 20 andere personen. In de figuur is van verschillende landen in de Europese Unie de vaccinatiegraad tegen mazelen weergegeven.



4p **8** Onderzoek in welke landen uit de figuur de ziekte mazelen zich zal uitbreiden.

Rookgedrag van leerlingen

Sinds de jaren tachtig meet het Trimbos-instituut regelmatig via een enquête het gebruik van alcohol, drugs en tabak in aselecte, representatieve steekproeven onder alle leerlingen van het voortgezet onderwijs. Ook werd de leerlingen in de enquête gevraagd naar hun leeftijd (in jaren), hun geslacht (jongen, meisje), en hun schoolniveau (vmbo, havo, vwo).

Aan de enquête van 2015 deden 6714 leerlingen mee in de leeftijd van 12 tot en met 16 jaar. In deze groep is onder andere gekeken naar de lifetime-prevalentie van roken. Hieronder staat wat dit begrip betekent:

> **lifetime-prevalentie van roken** = het percentage van de leerlingen dat rookt of ooit gerookt heeft in zijn of haar leven.

Zie tabel 1.

tabel 1 lifetime-prevalentie van roken

steekproefomvang	6714
aantal dat rookt of ooit gerookt heeft	1544
lifetime-prevalentie	23%

In tabel 1 zie je dat van de leerlingen in de steekproef 23%, bijna een kwart, rookt of ooit gerookt heeft.
Op basis van bovenstaande gegevens kun je het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de lifetime-prevalentie van roken berekenen.

3p **9** Bereken dit 95%-betrouwbaarheidsinterval. Rond de percentages in je antwoord af op gehele getallen.

In tabel 2 zijn de 6714 leerlingen uitgesplitst naar schoolniveau.

tabel 2 lifetime-prevalentie van roken

	aantal leerlingen	aantal dat rookt of ooit gerookt heeft	lifetime-prevalentie
vmbo	3265	873	27%
havo	1805	410	23%
vwo	1644	261	16%
totaal	**6714**	**1544**	**23%**

5p **10** Bepaal met behulp van het formuleblad of het verschil in lifetime-prevalentie van roken tussen havoleerlingen en vwo-leerlingen groot, middelmatig of gering is.

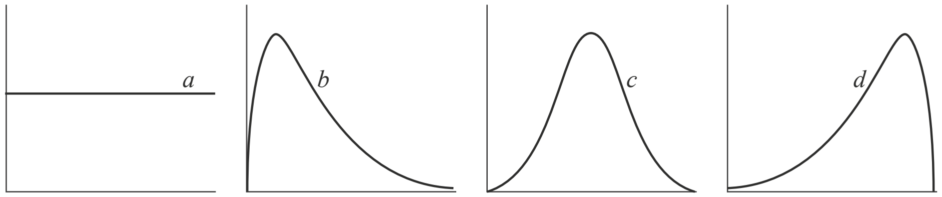
Van de 1544 leerlingen die aangaven dat zij rookten of ooit gerookt hadden, gaven 712 leerlingen aan in de afgelopen maand nog gerookt te hebben. Deze groep van 712 leerlingen noemen we ‘de rokers’. Aan de rokers is gevraagd hoeveel sigaretten zij gemiddeld per dag hebben gerookt in de afgelopen maand. Het resultaat staat in tabel 3.

tabel 3 gemiddeld aantal sigaretten per dag

	aantal leerlingen
minder dan één sigaret (< 1)	364
één tot en met tien sigaretten (1 – 10)	255
meer dan tien sigaretten (> 10)	93
totaal	**712**

Tabel 3 geeft inzicht in de verdeling van de variabele ‘gemiddeld aantal sigaretten per dag in de afgelopen maand’. Op basis van deze gegevens kun je inschatten hoe de relatieve frequentiepolygoon van deze variabele eruitziet. In de figuur staan vier schetsen van relatieve frequentiepolygonen (*a*, *b*, *c*, *d*).

figuur



2p **11** Welke van deze vier relatieve frequentiepolygonen geeft de verdeling waarschijnlijk het best weer? Licht je antwoord toe.

In tabel 4 zijn de gegevens van tabel 3 uitgesplitst naar geslacht.

tabel 4 gemiddeld aantal sigaretten per dag

	meisjes	jongens	totaal
minder dan één sigaret (< 1)	196	168	364
één tot en met tien sigaretten (1 – 10)	111	144	255
meer dan tien sigaretten (> 10)	29	64	93
totaal	**336**	**376**	**712**

3p **12** Bij welk geslacht, meisjes of jongens, is de mediaan van het gemiddeld aantal sigaretten per dag het grootst? Licht je antwoord toe

Een ranglijst van alle schakers

Bij een schaakpartij kan een speler punten verdienen. Als hij een partij wint, krijgt hij 1 punt. Als hij verliest, dan krijgt hij 0 punten. Wanneer de partij in remise eindigt (geen van beide spelers heeft gewonnen), dan krijgt hij 0,5 punt.

Door op bovenstaande manier punten toe te kennen, kan een ranglijst worden opgesteld van alle wedstrijdspelers in de wereld. De top 10 van deze ranglijst (juni 2017) zie je in de figuur.

figuur

#	naam	land	rating
1	Carlsen		2827
2	Kasparov		2812
3	Vachier-Lagrave		2810
4	Kramnik		2809
5	Aronian		2807
6	Caruana		2800
7	Mamedyarov		2792
8	Anand		2791
9	So		2783
10	Grischuk		2779

In de figuur zie je bij elke speler zijn **rating**. Hoe hoger de rating, des te beter de speler tot dan toe heeft gespeeld. De rating wordt altijd afgerond op een geheel getal.

In deze opgave wordt uitgelegd hoe de rating van een speler berekend wordt. Hiervoor kijkt men allereerst naar de **vooraf verwachte score** voor de speler bij elke partij die hij gaat spelen: dat is een voorspelling van het aantal punten dat hij met die partij gaat scoren. Dit getal ligt tussen 0 en 1. Als het kleiner is dan 0,5, dan mag je verwachten dat hij zal verliezen. Als het groter is dan 0,5, dan mag je verwachten dat hij zal winnen.

Als twee schakers, speler A en speler B, een partij tegen elkaar gaan spelen, dan kan met behulp van de rating van beide spelers de vooraf verwachte score bij de partij voor speler A worden berekend[1)] met de volgende formule:

$$V_A = \frac{1}{1 + 10^{0,0025 \cdot (R_B - R_A)}}$$

Hierin is:
- V_A de vooraf verwachte score bij de partij voor speler A
- R_A de rating van speler A
- R_B de rating van speler B

Schakers Rutten en Faber gaan een partij spelen. De rating van Rutten is 2307, de rating van Faber is 2107.

3p **13** Laat met behulp van de formule zien dat je mag verwachten dat Faber zal verliezen.

De rating van schaker Altena (schaker A) is 1932. Er geldt: hoe hoger de rating van zijn tegenspeler (schaker B) is, des te lager is de vooraf verwachte score voor Altena. Dit kan beredeneerd worden aan de hand van de formule.

3p **14** Geef deze redenering zonder gebruik te maken van de grafische rekenmachine.

noot 1 In de praktijk worden andere formules gebruikt, maar de gegeven formule geeft een goede benadering.

We gaan er in de rest van deze opgave van uit dat de nieuwe rating van een speler wordt berekend direct na het spelen van de partij. Deze nieuwe rating wordt bepaald met behulp van het aantal punten P dat de speler met de partij scoorde (0 of 0,5 of 1) en de vooraf verwachte score V bij de partij voor de speler. Voor een grootmeester (een zeer goede schaker) gaat dit met het onderstaande stappenplan:

1. Eerst wordt het verschil berekend van het aantal punten dat de speler met de partij scoorde en de vooraf verwachte score voor de speler bij deze partij (dus $P - V$).
2. De uitkomst bij stap 1 wordt vermenigvuldigd met 10.
3. De uitkomst bij stap 2 wordt afgerond op een geheel getal.
4. De uitkomst bij stap 3 wordt opgeteld bij de rating die de speler vóór de partij had.

Op het Tata Steel-schaaktoernooi in 2015 speelden de grootmeesters Magnus Carlsen en Radoslaw Wojtaszek tegen elkaar. Voorafgaand aan deze partij was de rating van Carlsen 2862 en die van Wojtaszek 2744. De partij werd gewonnen door Wojtaszek.

4p **15** Bereken de nieuwe rating van Wojtaszek.

De rating van een grootmeester kan door één partij nooit met meer dan 10 punten stijgen.

3p **16** Leg uit waarom dit juist is.

De Jamuna, een krachtige rivier

De Jamuna is een van de grootste rivieren van Bangladesh. In het regenseizoen kan de rivier wel bijna 12 km breed zijn. Dan stroomt het water zo snel en met zo veel kracht, dat de oevers van de rivier aangetast worden. Een deel van de oevers verdwijnt dan door het water. Zie de foto.

foto

Op een bepaalde plaats van de Jamuna wordt gemeten hoeveel water (in m^3) daar per seconde langs stroomt. Dit noemt men de **waterdoorvoer**. Deze varieert behoorlijk: in het regenseizoen kan de waterdoorvoer wel 100 000 m^3 per seconde zijn, terwijl de waterdoorvoer in de droge tijd ‘slechts’ 3000 m^3 per seconde is.

Er is berekend hoe groot de waterdoorvoer in de maand januari van 1972 gemiddeld was. Dit werd ook gedaan voor alle andere januarimaanden in de periode 1973 tot en met 2007. Deze 36 waarden zijn samengevat met een boxplot. Deze boxplot staat in de figuur op de uitwerkbijlage.
In diezelfde figuur staat ook een boxplot die hoort bij alle februarimaanden in de periode 1972 tot en met 2007. En net zo voor alle andere maanden in het jaar.

Karin doet met behulp van het formuleblad de volgende uitspraak: “Het verschil in gemiddelde waterdoorvoer tussen de julimaanden en de augustusmaanden in de periode 1972 tot en met 2007 is gering.”

2p **17** Is deze uitspraak juist, onjuist, of is dat niet uit de figuur op de uitwerkbijlage af te leiden? Licht je antwoord toe.

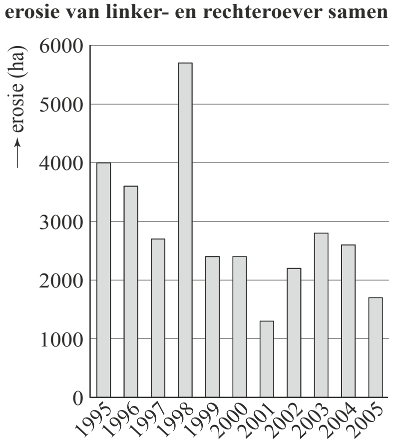
Bob doet ook een uitspraak: “In april 1983 was de gemiddelde waterdoorvoer groter dan in februari 1983.”

2p **18** Is deze uitspraak juist, onjuist, of is dat niet uit de figuur op de uitwerkbijlage af te leiden? Licht je antwoord toe.

Als de waterdoorvoer erg groot is, ook al is dat maar gedurende een paar uur of een paar dagen, dan worden de oevers aangetast en verdwijnen er stukken oever in de rivier. Dit heet **erosie**.

Voor de jaren 1995 tot en met 2005 is in figuur 1 te zien hoeveel hectare land door erosie verdween (1 hectare (ha) = 10 000 m^2).

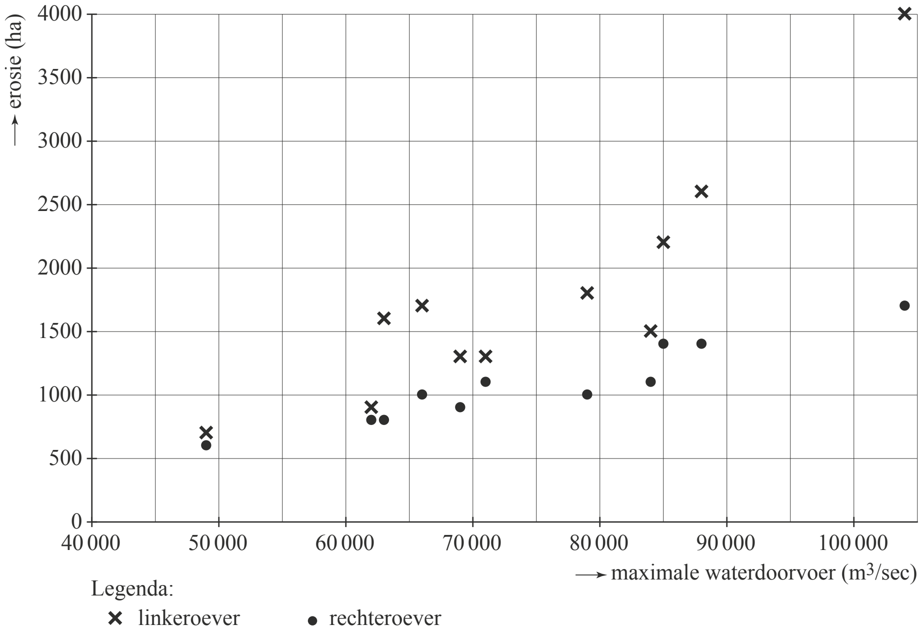
figuur 1



In figuur 2 is voor elk jaar in de periode 1995 tot en met 2005 zowel de erosie van de linkeroever als de erosie van de rechteroever in dat jaar uitgezet tegen de maximale waterdoorvoer in dat jaar. Zo kun je in figuur 2 bijvoorbeeld zien dat in één van die jaren 2200 ha van de linkeroever verdween, 1400 ha van de rechteroever verdween en dat de maximale waterdoorvoer 85 000 m^3 per seconde was. Je kunt in figuur 2 echter niet zien in welk jaar dat was.

Figuur 1 en figuur 2 staan ook op de uitwerkbijlage.

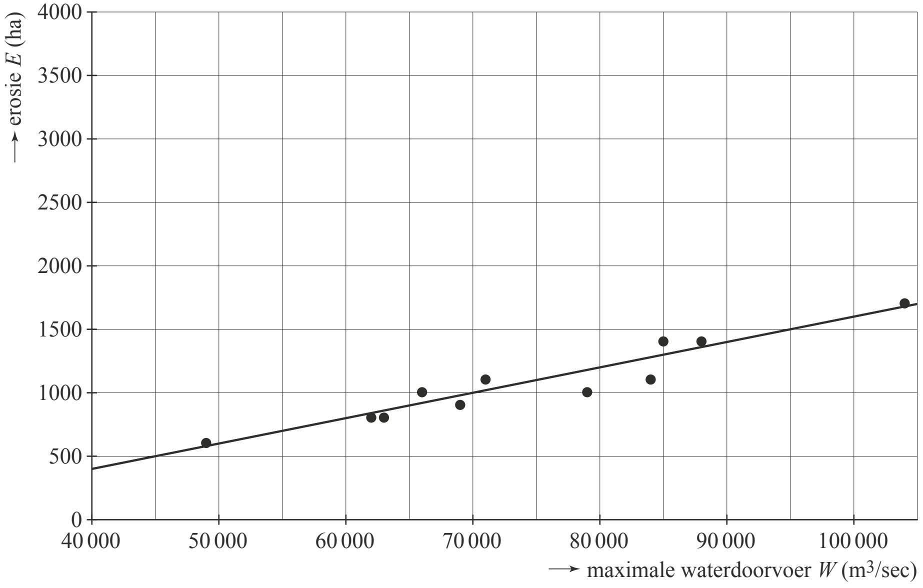
figuur 2



3p **19** Bepaal de maximale waterdoorvoer in het jaar 1995 met behulp van figuur 1 en figuur 2. Je kunt hierbij de figuren op de uitwerkbijlage gebruiken.

In figuur 3 zijn nogmaals de punten weergegeven die bij de erosie van de rechteroever horen. Deze punten liggen bij benadering op een rechte lijn. Deze lijn is in figuur 3 getekend.

figuur 3



Je kunt van deze lijn de formule opstellen, waarbij je de erosie *E* (in ha) uitdrukt in de maximale waterdoorvoer *W* (in m^3/sec).

4p **20** Stel deze formule op.

Voor de bewoners langs de Jamuna zijn de gevolgen van erosie groot. Veel mensen die een stukje grond langs de rivier hadden, hebben moeten toezien hoe hun grond door de rivier verdween. Dit trof veel mensen, doordat Bangladesh dichtbevolkt is: de bevolkingsdichtheid was aan het begin van deze eeuw 975 inwoners per km^2.

Een politicus wil een berekening hebben van het aantal bewoners dat in de periode 2001 tot en met 2005 het land waarop zij woonden zijn kwijtgeraakt als gevolg van erosie door de Jamuna.
Gebruik bij deze berekening figuur 1 en neem aan dat in deze periode de bevolkingsdichtheid van 975 inwoners per km^2 ook geldt voor het gebied langs de Jamuna.

4p **21** Geef deze berekening. Rond het aantal bewoners af op duizendtallen.

Overboekt

Een overboeking van een vliegtuig ontstaat doordat voor een vlucht meer tickets worden verkocht dan er zitplaatsen zijn. Sommige vliegmaatschappijen kiezen hiervoor, omdat telkens weer blijkt dat niet iedereen die een vliegticket heeft gekocht komt opdagen. Door meer tickets te verkopen willen de vliegmaatschappijen hun winst vergroten. Een vliegmaatschappij rekent er dus bij overboeking op dat sommige passagiers niet komen opdagen. Als vrijwel alle passagiers wel komen opdagen, zijn er te weinig zitplaatsen. In dat geval kunnen één of meer passagiers niet mee. De vliegmaatschappij lost dit op door aan deze passagiers een vergoeding te geven.

De vliegmaatschappij Aircrown vliegt in de Verenigde Staten dagelijks op de route Minneapolis – Chicago. Het vliegtuig waarmee gevlogen wordt, heeft 198 stoelen. De tickets op deze vlucht kosten $ 78 (78 dollar).
Een risicoanalist heeft twee situaties onderzocht: de situatie zonder overboeking en de situatie met overboeking van het vliegtuig.

Zonder overboeking van het vliegtuig
198 mensen kopen een ticket. Allen kunnen mee met het vliegtuig en wie niet komt opdagen is zijn geld kwijt.

Met overboeking van het vliegtuig
Aircrown verkoopt geen 198, maar 210 tickets per vlucht. Iedere passagier die niet komt opdagen, is zijn geld kwijt. Iedere passagier die wel komt opdagen en voor wie er geen stoel meer is, krijgt zijn $ 78 niet terug, maar krijgt wel een vergoeding van $ 250. Dit zijn de enige extra kosten die Aircrown maakt door het verkopen van de extra tickets.

Aircrown heeft van 300 vluchten waarvan de 210 tickets allemaal verkocht zijn, bijgehouden hoeveel passagiers er zijn komen opdagen. Zie de tabel. Met deze gegevens kun je berekenen hoeveel dollar de vliegmaatschappij aan vergoedingen heeft moet betalen.

tabel

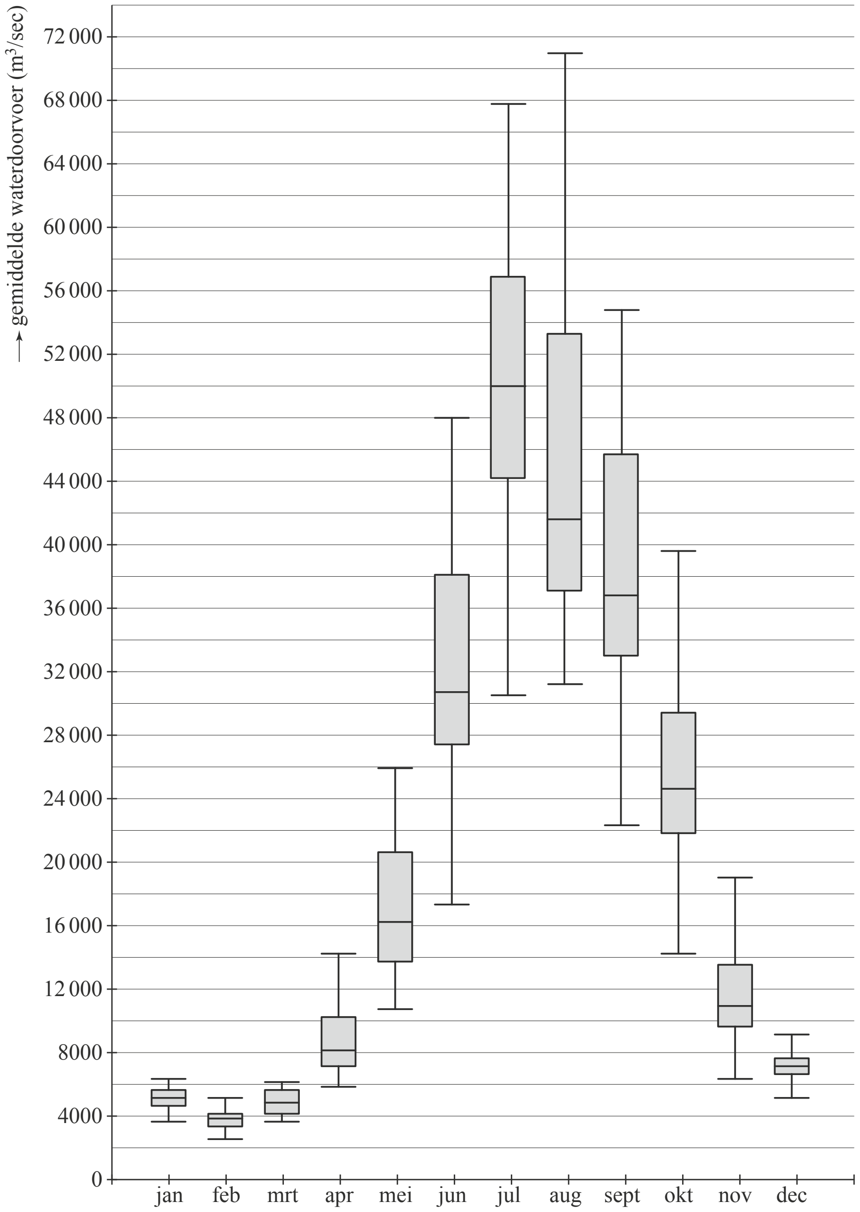
aantal passagiers dat komt opdagen	195 of minder	196	197	198	199	200	201	202	203	204 of meer
aantal vluchten	234	22	17	11	8	4	2	1	1	0

De risicoanalist van de vliegmaatschappij wil met bovenstaande gegevens berekenen wat overboeking oplevert aan extra winst in vergelijking met de situatie zonder overboeking.
Hij kijkt hiervoor naar de gemiddelde winst **per stoel** per vlucht.
In de situatie zonder overboeking is de gemiddelde winst per stoel per vlucht gelijk aan $ 11,25.
Volgens de risicoanalist is de gemiddelde winst per stoel per vlucht in de situatie met overboeking minstens 25% hoger dan in de situatie zonder overboeking.

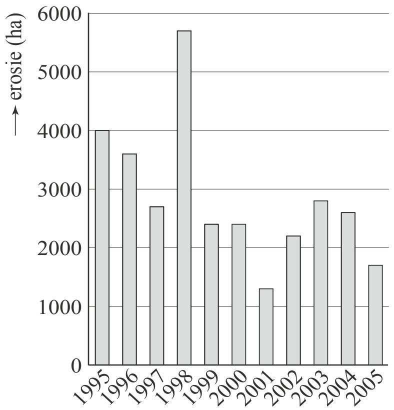
8p **22** Onderzoek of de risicoanalist gelijk heeft.

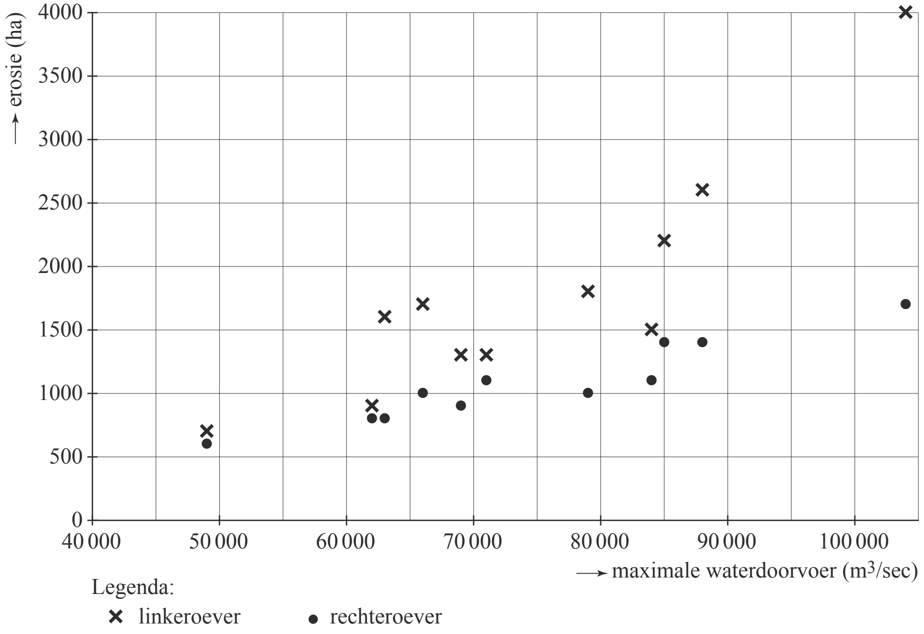
Uitwerkbijlage bij de vragen 17, 18 en 19

17, 18



19





Hints bij examen 2018-II

1 Bereken de procentuele toename ten opzichte van het indexcijfer 109.

2 Gebruik de indexcijfers van 2005 en 2010 en bereken eerst de toename per jaar.

3 Exponentiële groei. Bereken eerst de groeifactor per jaar.

4 Werk van binnen naar buiten. Als p groter wordt, dan wordt $\frac{p}{100}$...

5 De ziekte breidt zich niet uit als B_V maximaal 1 is. Ga na welke vergelijking opgelost moet worden.

6 Bepaal B_V en bereken eerst hoeveel personen er met griep zijn in week 46 met én zonder vaccinatie.

7 B_V =1 substitueren en de formule herschrijven tot p = ...

8 B = 20 is gegeven en er is uitbreiding van de ziekte als $B_V > 1$.

9 Gebruik de formulekaart voor het 95% betrouwbaarheidsinterval.

10 Het gaat om het vergelijken van twee groepen havo en vwo waarvan de aantallen wel/niet roken te berekenen zijn. Gebruik de formulekaart en *phi*.

11 Bedenk hoe de grafiek eruit zou zien als je zelf een relatief frequentiepolygoon tekent, met op de horizontale as 0 t/m 20 sigaretten.

12 Als je alle waarden op volgorde van grootte zet, dan is het mediaan het middelste getal (50%).

13 Bereken de uitkomst van V_A. Speler A is Faber.

14 Beredeneer vanuit R_B. Als R_B groter wordt, dan wordt ook R_B – 1932 .... etc.

15 Volg het stappenplan. Bereken voor stap 1 eerst V_A.

16 Beredeneer dit met behulp van het stappenplan. Beredeneer bij stap 1 welke waarde $P - V$ maximaal kan aannemen.

17 Gebruik twee boxplots vergelijken (zie de formulekaart). Bekijk of de boxen elkaar overlappen en bekijk de ligging van de mediaan.

18 Gebruik de gegevens uit de boxplots van februari en april. Kijk naar de minimale/maximale gemiddelde waterdoorvoer.

19 Combineer figuur 1 en figuur 2. De totale erosie is gelijk aan de som van de erosie van de linker- en de rechteroever.

20 Rechte lijn, dus de formule is van de vorm: $E = a \cdot W + b$. Kies twee punten op de lijn.

21 Bereken eerst de totale erosie vanaf 2001 tot en met 2005 in km^2.

22 Bereken eerst de extra inkomsten en de extra kosten als er 210 tickets verkocht worden in vergelijking met de verkoop van 198 tickets.

© ThiemeMeulenhoff

Uitwerkingen bij examen 2018-II

Voedingsmiddelen

3p **1** *eerste manier, m.b.v. de indexcijfers:*
Het indexcijfer van vlees is gestegen van 109 naar 118. [1p] Het indexcijfer is $\frac{118}{109} \approx 1{,}083$ zo groot geworden. [1p]
De prijs is dus gestegen met 8,3 %. Afgerond op een geheel getal is dit 8%. [1p]

tweede manier, m.b.v. de stijging:
Het indexcijfer van vlees is t.o.v. van het indexcijfer 109 met 9 gestegen, [1p] dus met $\frac{9}{109} \cdot 100\% \approx 8{,}3\%$. [1p]
Afgerond op een geheel getal is dit 8%. [1p]

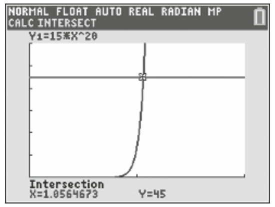
derde manier, m.b.v. een getallenvoorbeeld:
Kies een prijs voor vlees, bijv. 20 euro per kg in 2000 (indexcijfer 100).
In 2006 (indexcijfer 109) is de prijs van vlees 1,09 · 20 = 21,80 en in 2010 (indexcijfer 118) 1,18 · 20 = 23,60. [1p]
De procentuele toename is $\frac{23{,}60 - 21{,}80}{21{,}80} \cdot 100\% \approx 8{,}3\%$. [1p] Afgerond op een geheel getal is dit 8%. [1p]

3p **2** *Lineair interpoleren met behulp van de indexcijfers van 2005 en 2010.*
In 2005 is het indexcijfer 103 en in 2010 is het indexcijfer 109. [1p]
Er is een toename van 6 per 5 jaar, dus een toename van $\frac{6}{5} = 1{,}2$ per jaar. [1p]
2021 is 11 jaar na 2010.
Conclusie: in 2021 is het indexcijfer 109 + 11 · 1,2 = 122,2 en dit is afgerond 122. [1p]

4p **3** *Exponentiële groei, bereken eerst de groeifactor per jaar.*

eerste manier, direct g per jaar berekenen:
In 20 jaar (1985 – 2005) is de vleesconsumptie verdrievoudigd, dus de groeifactor per 20 jaar is 3. [1p]
De groeifactor g per jaar = $3^{\frac{1}{20}} \approx 1{,}05646...$ (of $g = \sqrt[20]{3} \approx 1{,}05646...$) [2p]
Er is een toename van 5,646... % per jaar, afgerond op een geheel getal is dit 6%. [1p]

tweede manier, met de grafische rekenmachine:
In 20 jaar (1985 – 2005) is de vleesconsumptie verdrievoudigd tot 45.
Neem g de groeifactor per jaar. Er geldt: $15 \cdot g^{20} = 45$ [1p]
Voer in $y_1 = 15 \cdot x^{20}$ en $y_2 = 45$. Intersect geeft $x = g \approx 1{,}05646...$ [2p]

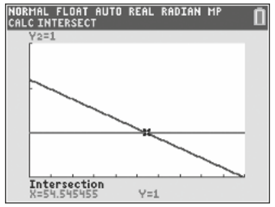


Er is een toename van 5,646... % per jaar, afgerond op een geheel getal is dit 6%. [1p]

Besmettelijke ziektes

3p **4** *Beredeneer zonder getallenvoorbeeld, ga uit van de formule en werk van binnen naar buiten.*
De vaccinatiegraad p is een percentage, dus een getal van 0 tot en met 100.
Als p groter wordt dan wordt $\frac{p}{100}$ groter ($\frac{p}{100}$ is minimaal 0 en maximaal 1), [1p]
$1 - \frac{p}{100}$ wordt dan dus kleiner (want je trekt een groter getal van 1 af). [1p]
B is een positief vast getal, dus $B_V = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ wordt kleiner als p groter wordt, want je vermenigvuldigt B met een kleiner getal.
Conclusie: als de vaccinatiegraad p hoger wordt, dan wordt $B_V = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ kleiner. [1p]

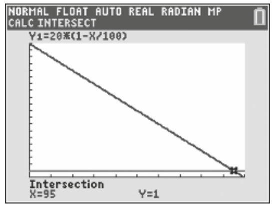
3p **5** *Een ziekte breidt zich niet uit als BV maximaal 1 is.*
$B = 2{,}2$, dus geldt $B_V = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) = 2{,}2 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) \leq 1$ moet opgelost worden. [1p]
Voer in $y_1 = 2{,}2 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$ en $y_2 = 1$.
Intersect geeft $x = p \approx 54{,}5...$ [1p]
Conclusie: de vaccinatiegraad moet minimaal 55% zijn. [1p]



5p **6** 14% heeft zich laten vaccineren, dus $p = 14$ en $B = 2{,}2$ (is gegeven),
dus $B_V = 2{,}2 \cdot \left(1 - \frac{14}{100}\right) = 1{,}892$ [1p]
In week 40 zijn er 1000 personen met griep, in week 46 zijn dit er $1000 \cdot 1{,}892^6 = 45869{,}7...$ dus afgerond 45 870. [1p]
Als niemand zich tegen griep laat vaccineren geldt $B_V = B = 2{,}2$.
In week 46 zijn er dan $1000 \cdot 2{,}2^6 = 113\,379{,}9...$ dus afgerond 113 380 personen met griep. [1p]
Met vaccinatie is dit $\frac{113\,380 - 45\,870}{113\,380} \cdot 100\% \approx 59{,}54...\%$ [1p] minder dan zonder vaccinatie.
Conclusie: afgerond is dit 60% minder. [1p]

4p **7** $B_V = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ en $B_V = 1$ dus $1 = B \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ [1p] herschrijven tot de gewenste vorm.
$\frac{1}{B} = \left(1 - \frac{p}{100}\right)$ [1p] dus $\frac{1}{B} - 1 = -\frac{p}{100}$, dus
$-\frac{1}{B} + 1 = \frac{p}{100}$ (vermenigvuldig alles met 100) [1p]
$-\frac{100}{B} + 100 = p$, dus
$p = 100 - \frac{100}{B}$ [1p]

4p **8** *eerste manier, m.b.v. de formule $B_V > 1$:*
$B = 20$, [1p] dus er is uitbreiding als $B_V = 20 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) > 1$
Voer in $y_1 = 20 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right)$ en $y_2 = 1$. Intersect geeft $x = p = 95$ [1p]
Er is uitbreiding als $p < 95$ [1p]
Conclusie: de ziekte zal zich uitbreiden in de landen Denemarken, Frankrijk, Italië, Noorwegen en Oostenrijk. [1p]



tweede manier, door gegevens in de formule in te vullen:

$B = 20$, [1p] dus er is uitbreiding als $B_V = 20 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right) > 1$, [1p] dus uitbreiding.

Voor Italië geldt $p = 90$ en dus $B_V = 20 \cdot \left(1 - \frac{90}{100}\right) = 2 > 1$, dus uitbreiding. [1p]

Voor Noorwegen geldt $p = 94$ en dus $B_V = 20 \cdot \left(1 - \frac{94}{100}\right) = 1{,}2 > 1$, dus uitbreiding.

Voor Nederland geldt $p = 96$ en dus $B_V = 20 \cdot \left(1 - \frac{96}{100}\right) = 0{,}8 < 1$, dus geen uitbreiding.
Conclusie: de ziekte zal zich uitbreiden in de landen met een vaccinatiegraad kleiner of gelijk aan die van Noorwegen, dus in Denemarken, Frankrijk, Italië, Noorwegen en Oostenrijk. [1p]

Rookgedrag van leerlingen

3p **9** *Zie de formulekaart voor het 95% betrouwbaarheidsinterval.*
De steekproefproportie $p = 0{,}23$ en de steekproefomvang $n = 6714$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is $p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 0{,}23 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}23 \cdot (1-0{,}23)}{6714}}$

$\approx 0{,}23 \pm 0{,}01027...$ [1p]
De ondergrens = 0,23 – 0,01027… = 0,21972… in hele procenten 22%
De bovengrens = 0,23 + 0,01027… = 0,24027… in hele procenten 24% [1p]
Conclusie: het 95% betrouwbaarheidsinterval is [22; 24] in hele procenten nauwkeurig. [1p]

5p **10** *Zie de formulekaart voor het verschil tussen twee groepen.*
Het verschil in lifetime-prevalentie van roken tussen havoleerlingen en vwo-leerlingen wordt gevraagd. Het gaat om twee groepen waar de aantallen van bekend zijn, dus *phi*. [1p]
Uit tabel 2 volgt [2p voor onderstaande tabel]

	havo	vwo	totaal
wel gerookt	410	261	671
niet gerookt	1395	1383	2778
aantal leerlingen	1805	1644	3449

$phi = \frac{410 \cdot 1383 - 261 \cdot 1395}{\sqrt{(410+261) \cdot (410+1395) \cdot (261+1383)(\cdot 1395+1383)}} = \frac{202\,935}{2351\,889{,}377} = 0{,}08628...$ [1p]

Conclusie: het verschil is gering want 0,086… ligt tussen –0,2 en 0,2. [1p]

2p **11** *Relatief frequentiepolygoon, bekijk de percentages per gemiddeld aantal sigaretten per dag.*
Er zijn 364 van de 712 leerlingen die minder dan 1 sigaret opsteken, dus tussen 0 en 1 is de frequentie $\frac{364}{712} \cdot 100\,\% \approx 51\%$, meer dan de helft van de leerlingen rookt gemiddeld minder dan 1 sigaret. Dus de top zit links.
255 van de 712 leerlingen roken 1 t/m 10 sigaretten, deze leerlingen worden verdeeld over gemiddeld 1 t/m 10 sigaretten en 93 van de 712 leerlingen roken meer dan 10 sigaretten.
De lage aantallen sigaretten hebben een veel hogere relatieve frequentie dan de hoge aantallen. [1p]
Conclusie: figuur *b* past het beste bij de tabel. [1p]

3p **12** *Mediaan, dus kijk welk getal hoort bij 50% van de waarnemingen.*
Er zijn 336 meisjes, dus de mediaan is het getal tussen het 168e en 169e meisje. De mediaan ligt dus in de klasse minder dan 1 sigaret. [1p]
Er zijn 376 jongens, dus de mediaan is het getal tussen het 188e en 189e jongen. De mediaan ligt dus in de klasse 1 tot en met 10 sigaretten. [1p]
Conclusie: de mediaan bij de jongens is het grootste. [1p]

Een ranglijst van alle schakers

3p **13** *Bereken de verwachte score van Faber, dus Faber is speler A.*
$R_A = 2107$ (rating Faber) en $R_B = 2307$ (rating Rutte). [1p]

$V_A = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot (R_B - R_A)}} = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot (2307-2107)}} = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot 200}} = 0{,}24...$ [1p]

Conclusie: de uitkomst 0,24... van V_A is kleiner dan 0,5, dus de verwachting is dat Faber gaat verliezen. [1p]

3p **14** *Beredeneer zonder grafische rekenmachine, gebruik de formule.*
$R_A = 1932$ (rating Altena), dus $V_A = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot (R_B - R_A)}} = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot (R_B - 1932)}}$

Als R_B groter wordt, dan wordt ook $R_B - 1932$ groter en dus ook $0{,}0025 \cdot (R_B - 1932)$, [1p] dan wordt ook $10^{0{,}0025 \cdot (R_B - 1932)}$ groter en dus ook $1 + 10^{0{,}0025 \cdot (R_B - 1932)}$ [1p]

Je deelt door een groter getal dus wordt $V_A = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot (R_B - 1932)}}$ kleiner. [1p]

4p **15** *Volg het stappenplan in het kader.*
Stap 1: bereken P – V
$R_A = 2744$ (rating Wojtaszek) en $R_B = 2862$ (rating Carlsen).
Verwachte score $V = V_A = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot (R_B - R_A)}} = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot (2862-2744)}}$ [1p] =

$\frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot 118}} = 0{,}3364...$ [1p]

$P = 1$ (aantal punten dat speler Wojtaszek met de partij scoorde).
$P - V = 1 - 0{,}3364... = 0{,}6635...$ [1p]

Stap 2: vermenigvuldig met 10
10·0,6635… = 6,635…

Stap 3: rond af op een geheel getal
6,635… wordt afgerond 7.

Stap 4: uitkomst stap 3 + oude rating = nieuwe rating
7 + 2744 = 2751 is de nieuwe rating van Wojtaszek. [1p]

3p **16** *Gebruik het stappenplan van onderdeel 15 en bekijk de maximale waarde waarmee de rating kan stijgen.*

Stap 1: bereken P – V
$P = 0$ of $P = 0{,}5$ of $P = 1$

$10^{0{,}0025 \cdot (R_B - R_A)}$ is altijd groter dan 0, dus $1 + 10^{0{,}0025 \cdot (R_B - R_A)}$ is altijd groter dan 1,

dus $V = \frac{1}{1+10^{0{,}0025 \cdot (R_B - R_A)}}$ ligt tussen 0 en 1 (want je deelt 1 door een getal groter dan 1),
dus $P - V$ is groter dan –1 en kleiner dan 1. [1p]

Stap 2: vermenigvuldig met 10
$10 \cdot (P - V)$ ligt dus altijd tussen –10 en 10. [1p]

Stap 3: rond af op een geheel getal
Afgerond kan de waarde minimaal –10 en maximaal 10 zijn.

Stap 4: uitkomst stap 3 + oude rating = nieuwe rating
Conclusie: de rating kan dus maximaal 10 stijgen. [1p]

De Jamuna, een krachtige rivier

2p **17** *Gebruik het formuleblad: twee boxplots vergelijken.*
Vergelijk de boxen van juli en augustus.
De boxen overlappen elkaar.
De mediaan van augustus (± 41 500) valt buiten de boxplot van juli. [1p]
Conclusie: de uitspraak is onjuist want het verschil is middelmatig. [1p]

2p **18** *Gebruik de gegevens uit de boxplots van februari en april.*
In april is het minimum (ongeveer 5950) hoger dan het maximum (ongeveer 5300) in februari. [1p]
Conclusie: de uitspraak is juist, in april is de gemiddelde waterdoorvoer dus zeker groter dan in februari. [1p]

3p **19** *Combineer figuur 1 en figuur 2.*
In figuur 1 is af te lezen dat in 1995 de totale erosie gelijk is 4000 ha. [1p]
In figuur 2 is de erosie van de linker- en rechteroever af te lezen. De totale erosie van deze twee moet gelijk zijn aan 4000 ha. (Zoek naar punten waar dit voor klopt.) Bij een waterdoorvoer van 88 000 geldt voor de linkeroever een erosie van 2600 ha en voor de rechteroever een erosie van 1400 ha. Dit is samen 4000 ha. [1p]
Conclusie: de maximale waterdoorvoer is 88 000. [1p]

4p **20** *Rechte lijn, dus de formule is van de vorm: $E = a \cdot W + b$.*
Twee punten op de rechte lijn zijn bijvoorbeeld (45 000, 500) en (95 000, 1500). [1p]

$a = \frac{500 - 1500}{45\,000 - 95\,000} = 0{,}02$ [1p]

(45 000, 500) invullen in $E = 0{,}02 \cdot W + b$ geeft $500 = 0{,}02 \cdot 45\,000 + b$, dus $b = -400$ [1p]
Conclusie: $E = 0{,}02 \cdot W - 400$ [1p]

4p **21** *Bepaal de totale erosie van 2001 tot en met 2005 met behulp van figuur 1.*

jaar	2001	2002	2003	2004	2005	**Totaal**
erosie	1300	2200	2800	2600	1700	**10 600**

1 ha = 10 000 m^2 = 0,01 km^2
Dus de totale erosie is 10 600 ha [1p] = 106 km^2 [1p]
De bevolkingsdichtheid was 975 inwoners per km^2, dus als er 106 km^2 verdwijnt, dan zijn $975 \cdot 106 = 103\,350$ bewoners hun land kwijtgeraakt. [1p]
Conclusie: afgerond op 1000 tallen zijn 103 000 bewoners hun land kwijtgeraakt. [1p]

Overboekt

8p **22** *In de tabel een overzicht met het aantal passagiers dat een vergoeding krijgt.*

Aantal passagiers dat komt opdagen	195 of minder	196	197	198	199	200	201	202	203	≥ 204	Totaal
Aantal passagiers met \$ 250 vergoeding per vlucht	0	0	0	0	1	2	3	4	5	6	
Aantal vluchten	234	22	17	11	8	4	2	1	1	0	300

eerste manier, kijk naar de totale inkomsten/kosten bij een verkoop van 198 tickets en bij een verkoop van 210 tickets:
De prijs per ticket is \$ 78 en als er te veel passagiers komen opdagen dan is de vergoeding voor de passagiers die niet mee kunnen \$ 250 (het ticketbedrag krijgen ze niet terug).

Totaal zijn er 300 vluchten met 198 passagiers.
Bij een verkoop van198 tickets zijn de inkomsten per vlucht: $198 \cdot 78 = 15\,444$,
dus voor 300 vluchten is dit $300 \cdot 15\,444 = \$\,4\,633\,200$

Bij een verkoop van 210 tickets zijn de inkomsten per vlucht: $210 \cdot 78 = 16\,380$,
dus voor 300 vluchten is dit $300 \cdot 16\,380 = \$\,4\,914\,000$ [1p]
De extra inkomsten zijn dus 4 914 000 – 4 633 200 = \$ 280 800 [1p]
Het totaal aantal passagiers voor alle vluchten die een vergoeding krijgen:
$1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 31$ [2p]
De totale vergoeding is $31 \cdot 250 = \$\,7750$
De totale extra winst is 280 800 – 7750 = \$ 273 050 voor 300 vluchten. [1p]
Per vlucht is dit een toename van 273 050 : 300 = \$ 910,16…
Per stoel is dit een toename van 910,16… : 198 = \$ 4,59…. [1p]
De gemiddelde winst per stoel per vlucht bij een verkoop van 198 stoelen is \$ 11,25 (is gegeven)
De toename is $\frac{4{,}59...}{11{,}25} \cdot 100 = 40{,}86...\,\%$ [1p] en dit is meer dan 25%
Conclusie: de risicoanalist heeft gelijk. [1p]

tweede manier, kijk alleen naar de extra tickets die verkocht worden en de kosten:
De prijs per ticket is \$ 78 en als er te veel passagiers komen opdagen dan is de vergoeding voor de passagiers die niet mee kunnen \$ 250 (het ticketbedrag krijgen ze niet terug).
Bij verkoop van 210 tickets worden er 12 extra tickets verkocht [1p] en zijn de extra inkomsten voor de 300 vluchten $300 \cdot 12 \cdot 78 = \$\,280\,800$ [1p]
Het totaal aantal passagiers voor alle vluchten die een vergoeding krijgen:
$1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 31$ [2p]
De totale vergoeding is $31 \cdot 250 = \$\,7750$
De totale extra winst is 280 800 – 7750 = \$ 273 050 voor 300 vluchten. [1p]
300 vluchten met 198 stoelen. Dus de gemiddelde winst per stoel per vlucht neemt toe met $\frac{273\,050}{300 \cdot 198} = 4{,}59...$ [1p] De gemiddelde winst per stoel per vlucht bij een verkoop van 198 stoelen is \$ 11,25 (is gegeven)
De toename is $\frac{4{,}59...}{11{,}25} \cdot 100 = 40{,}86...\,\%$ [1p] en dit is meer dan 25%
Conclusie: de risicoanalist heeft gelijk. [1p]

Examen 2019-I

Stil asfalt

Wie naast een snelweg woont, heeft bijna altijd te maken met overlast door de geluidsintensiteit van het verkeer. De laatste jaren probeert men deze overlast te beperken, onder andere door het aanleggen van zogenaamd stil asfalt.
Met de volgende formule kan de geluidsintensiteit I worden berekend als bekend is hoeveel decibel (dB) geluid er wordt geproduceerd.

$I = 10^{0{,}1d-9}$

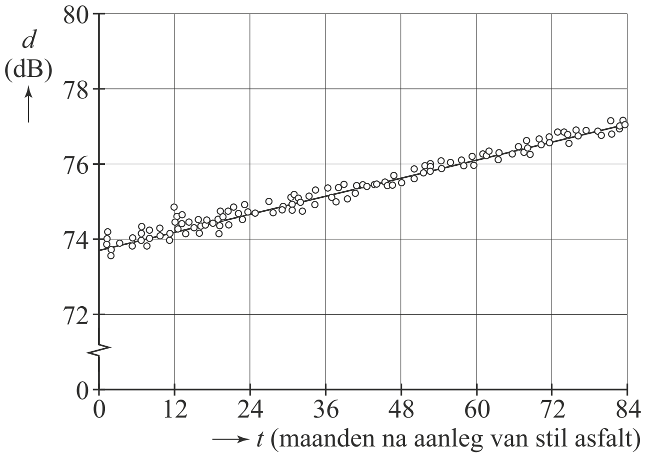
Hierin is d de hoeveelheid geproduceerd geluid in dB en is I de geluidsintensiteit in milliwatt per m^2.

Een weggedeelte wordt opnieuw geasfalteerd, waarbij het oude asfalt wordt vervangen door stil asfalt. De hoeveelheid geproduceerd geluid daalt daardoor van 80 dB naar 74 dB.

4p **1** Bereken met hoeveel procent de geluidsintensiteit afneemt. Geef je antwoord in hele procenten.

Uit metingen blijkt dat de hoeveelheid geproduceerd geluid op stil asfalt door de jaren heen stijgt. Dit komt onder andere door slijtage van het asfalt. In de figuur zijn de resultaten van een aantal metingen weergegeven.

figuur



De meetgegevens liggen op en rond de lijn die door de punten (0; 73, 7) en (84; 77, 0) gaat. De formule van deze lijn is $d = a \cdot t + 73{,}7$. Hierin is d de hoeveelheid geproduceerd geluid in dB, t de tijd in maanden na het aanleggen van stil asfalt en a een constant getal.

Afgerond op twee decimalen geldt $a = 0{,}04$ .De waarde van a kan nauwkeuriger berekend worden.

2p **2** Bereken a met behulp van de gegeven punten. Geef je antwoord in drie decimalen.

Je kunt de formule van d invullen in de formule van I. Dan ontstaat een nieuwe formule waarin de geluidsintensiteit I uitgedrukt is in het aantal maanden t na het aanleggen van stil asfalt. Deze formule luidt:

$I = 10^{0{,}1(0{,}04t+73{,}7)-9}$

Stil asfalt moet volgens planning worden vervangen als de geluidsintensiteit I volgens de formule groter wordt dan 0,058 milliwatt per m^2.

3p **3** Bereken met behulp van de laatste formule hoeveel hele maanden stil asfalt volgens planning meegaat.

Homeopathische middelen

Homeopathische middelen worden gemaakt uit grondstoffen die worden gehaald uit planten, dieren of mineralen. Uit deze grondstoffen wordt allereerst een basisstof gemaakt, de zogenoemde **oertinctuur.**
Oertinctuur is echter nog niet geschikt voor gebruik. Daarvoor moet deze een aantal keren verdund worden. Na deze verdunningen ontstaat dan een homeopathisch middel dat gereed is voor gebruik.

Voor het verdunnen worden verschillende verdunningsreeksen gebruikt. Zie de tabel.

tabel

D-reeks	verdunningen van 1 : 10
C-reeks	verdunningen van 1 : 100
LM-reeks	verdunningen van 1 : …

Om aan te geven welke verdunningen een oertinctuur ondergaan heeft, voegt men aan de Latijnse naam van het homeopathische middel een letter en een getal toe. Zo bestaat bijvoorbeeld het middel Arnica D3. De toevoeging D3 geeft aan dat de oertinctuur Arnica driemaal een verdunning van 1 : 10 heeft ondergaan. Het homeopathisch middel Arnica D3 bestaat dus voor 1/1000e deel uit de oertinctuur Arnica.

3p **4** Bereken welk deel van het homeopathisch middel Sulphur C6 uit de oertinctuur Sulphur bestaat.

Naast de D-reeks zijn er ook de C-reeks en de LM-reeks.
In de C-reeks is er sprake van verdunningen waarin bij elke verdunningsstap de hoeveelheid oertinctuur in het middel 99% minder wordt.
In de LM-reeks is er sprake van verdunningen waarin bij elke verdunningsstap de hoeveelheid oertinctuur in het middel 99,998% minder wordt.

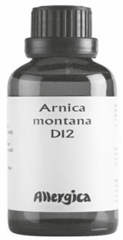
3p **5** Bereken welk getal er in de tabel op de puntjes moet komen te staan.

In de D-reeks wordt het percentage oertinctuur in een homeopathisch middel bij elke verdunning tien keer zo klein. Er geldt dus:

$$P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Hierin is P het percentage oertinctuur in een homeopathisch middel in de D-reeks en n het aantal verdunningen dat de oertinctuur ondergaan heeft.

Je kunt de formule van P herleiden tot de volgende formule:



$$P = 10^{2-n}$$

3p **6** Geef deze herleiding.

Iemand beweert dat de verdunning van de hoeveelheid oertinctuur in Arnica montana D12 gelijk is aan de verhouding van het volume van één waterdruppel tot het volume van 20 olympische zwembaden.

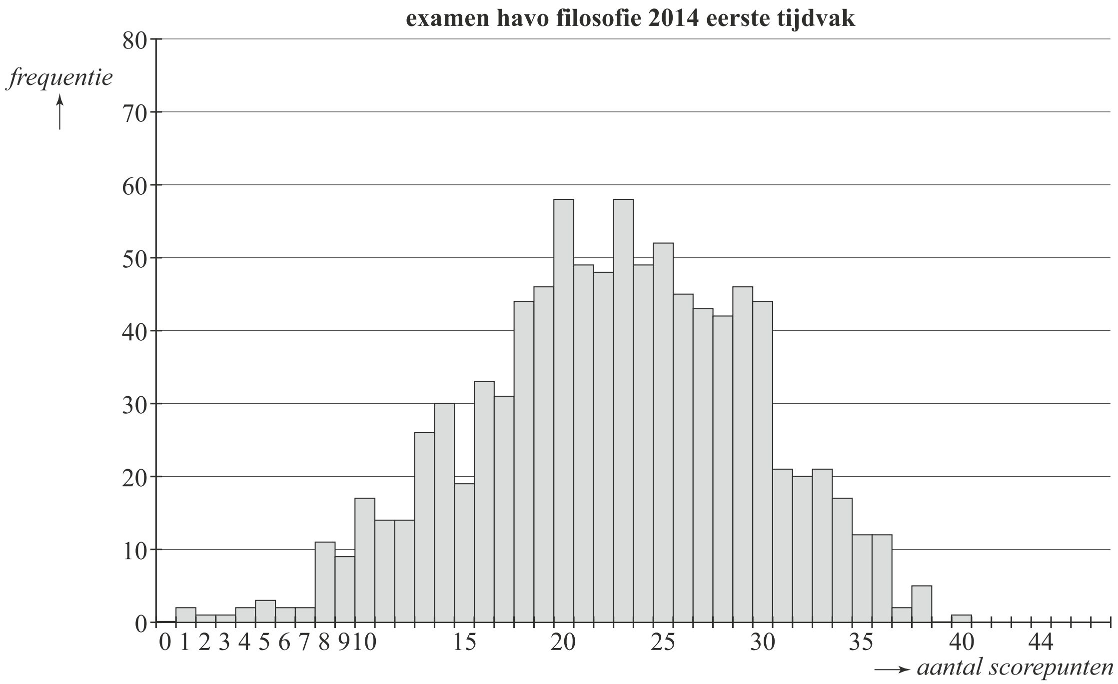
Een waterdruppel bevat ongeveer 0,05 milliliter en een olympisch zwembad heeft een inhoud van ongeveer 2,5 miljoen liter water.

4p **7** Laat zien dat de bewering klopt.

Examenanalyse

Ieder jaar worden de resultaten van de examens door Cito geanalyseerd. In deze opgave bekijken we de resultaten van twee examens havo 2014 eerste tijdvak, namelijk het examen filosofie en het examen Engels.
Het examen filosofie werd door ongeveer 1500 kandidaten gemaakt.
Cito heeft de resultaten van 950 kandidaten binnengekregen en geanalyseerd. De resultaten van de analysegroep staan in figuur 1 en in de tabel op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Voor het examen filosofie konden maximaal 44 scorepunten behaald worden. Zowel in de figuur als in de tabel op de uitwerkbijlage kun je zien dat de twee zwakste kandidaten in de analysegroep slechts 1 scorepunt behaalden en dat de beste kandidaat 40 scorepunten behaalde.

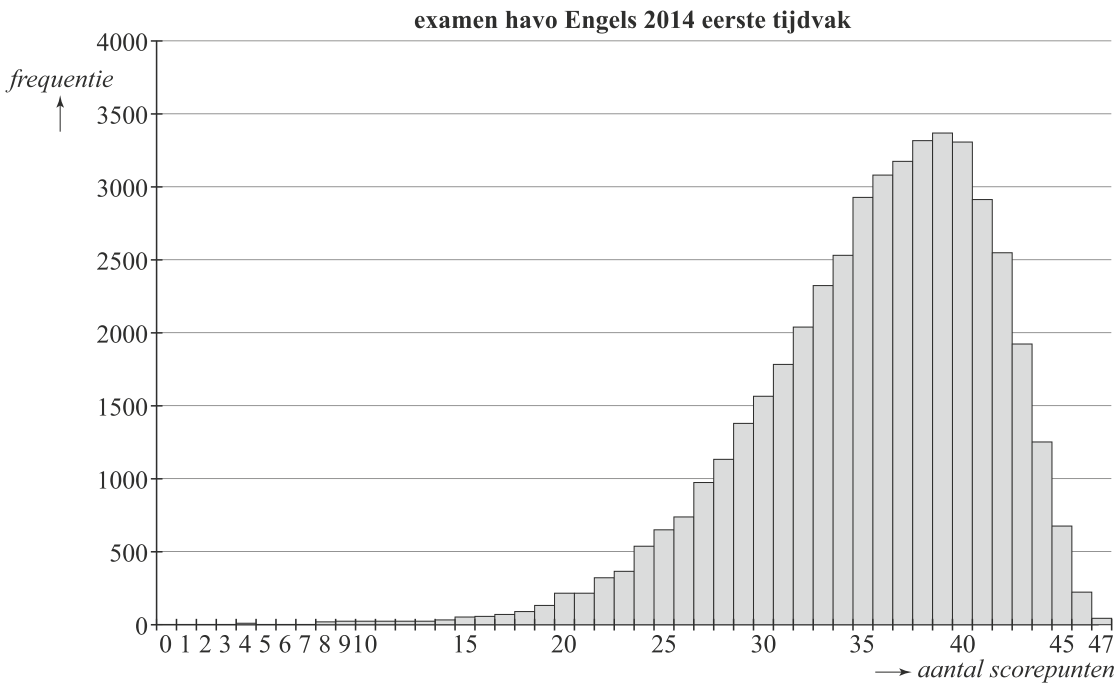
Het examen filosofie had een gemiddelde score van 22,5 met een standaardafwijking van 6,9. We bekijken de zwakste kandidaten in de analysegroep, met een score die meer dan tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde.

Als de scores normaal verdeeld zouden zijn, zou je met behulp van een vuistregel van de normale verdeling kunnen berekenen hoeveel kandidaten met zo'n score er in de analysegroep waren. De scores zijn echter niet normaal verdeeld. Het aantal kandidaten met zo'n lage score in de analysegroep blijkt toch ongeveer gelijk te zijn aan het aantal dat je op grond van de normale verdeling zou verwachten.

4p **8** Toon dit aan.

Van het examen Engels, dat door ruim 56 000 kandidaten is gemaakt, zijn de resultaten van 45 813 kandidaten geanalyseerd. Deze resultaten staan in figuur 2 en ook in de tabel op de uitwerkbijlage. Voor dit examen konden maximaal 47 scorepunten behaald worden. De gemiddelde score was 35,6 en de standaardafwijking 5,7.

figuur 2



Door gebruik te maken van figuur 2 en de tabel voor Engels op de uitwerkbijlage kun je berekenen hoe groot het verschil is tussen de modus en de mediaan van het aantal scorepunten voor het examen Engels.

4p **9** Bereken dit verschil. Licht je werkwijze toe.

Voor het examen filosofie behaalde 22,8% van de kandidaten in de analysegroep een onvoldoende (een cijfer lager dan 5,5).

3p **10** Laat zien dat het percentage onvoldoendes voor het examen Engels iets meer dan de helft daarvan was.

3p **11** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het percentage kandidaten met een onvoldoende voor filosofie. Geef de grenzen in één decimaal.

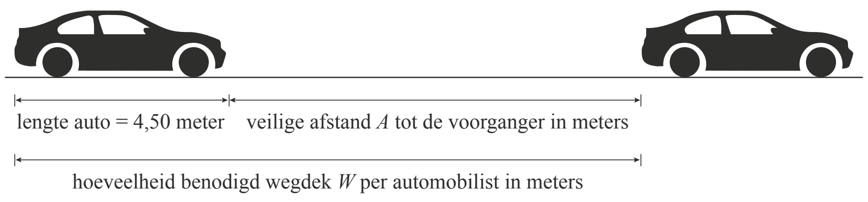
Een Cito-medewerker wil de samenhang tussen de scores van de examens filosofie en Engels onderzoeken. Zij vraagt zich af of een hoge score voor filosofie ook een hoge score voor Engels betekent.

3p **12** Welke grafische weergave is daarvoor het meest geschikt en welke extra informatie is nodig om die grafische weergave te kunnen maken?

File voorkomen

Veel verkeersongevallen worden veroorzaakt door auto's die te dicht op elkaar rijden. Om ongevallen te voorkomen moeten automobilisten een minimale afstand tot hun voorganger houden. Men noemt dit de **veilige afstand**. Zie de figuur.

figuur



De veilige afstand tussen een auto en zijn voorganger hangt af van de snelheid waarmee gereden wordt. Als beide auto's even snel rijden, geldt:

$$A = v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0{,}14\right)$$

Hierin is v de snelheid van beide auto's in km per uur en A de veilige afstand in meters.

Twee auto's rijden achter elkaar met een snelheid van 93 km per uur. De afstand tussen de twee auto's is 50 meter.

3p **13** Onderzoek of de achterste automobilist minimaal de veilige afstand tot zijn voorganger aanhoudt.

De veilige afstand wordt groter als de snelheid toeneemt.

3p **14** Beredeneer, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, dat de formule hiermee in overeenstemming is.

Je kunt de formule van A herleiden tot een vorm zonder haakjes. Met behulp van de informatie in de figuur kun je vervolgens een formule opstellen van de hoeveelheid wegdek W in meters die een automobilist nodig heeft als hij de veilige afstand aanhoudt. We gaan ervan uit dat de lengte van een auto 4,50 meter is.
De formule van W is te schrijven in de vorm $W = \ldots \cdot v^2 + \ldots \cdot v + \ldots$

3p **15** Stel de formule van W op en herleid de formule tot de bovenstaande vorm, waarbij op de puntjes getallen staan. Geef deze getallen in twee decimalen.

Wegbeheerder Rijkswaterstaat heeft voor een bepaald stuk snelweg een formule opgesteld voor het maximale aantal auto's dat in een bepaalde tijd over dit stuk snelweg kan rijden, de zogenaamde capaciteit *C*. Deze formule luidt:

$$C = \frac{1000v}{4{,}5 + 0{,}09v + 0{,}0035v^2}$$

In deze formule is *v* de snelheid in km per uur en *C* de capaciteit in aantal auto's per uur.

Het blijkt dat volgens de formule de grootste waarde van *C* op dit stuk snelweg bereikt wordt bij een vrij lage snelheid.

3p **16** Bereken bij welke snelheid hiervan sprake is. Geef je antwoord in hele km per uur.

Als er meer automobilisten van dit stuk snelweg gebruik willen maken dan volgens de capaciteit *C* mogelijk is, ontstaat er een file. Dit kan voorkomen worden als iedereen tijdig zijn snelheid aanpast.

Op matrixborden boven de snelweg geeft Rijkswaterstaat dan een maximumsnelheid aan (in hele km per uur). Dit is de hoogste snelheid die voorkomt dat een file ontstaat.

Op dit stuk snelweg moet in de avondspits de capaciteit minimaal 2500 auto's per uur zijn om een file te voorkomen.

4p **17** Bereken welke maximumsnelheid Rijkswaterstaat in deze situatie op de matrixborden aangeeft.

Rijkswaterstaat heeft op dit stuk snelweg gedurende één maandagmorgen metingen verricht en bijgehouden hoeveel auto's er passeerden. In de tabel zie je de resultaten gedurende één uur. Op dit stuk snelweg is een maximumsnelheid van 130 km per uur toegestaan.

tabel

tijdsinterval	aantal auto's	tijdsinterval	aantal auto's	tijdsinterval	aantal auto's
7.00-7.05 uur	73	7.20-7.25 uur	174	7.40-7.45 uur	235
7.05-7.10 uur	104	7.25-7.30 uur	198	7.45-7.50 uur	267
7.10-7.15 uur	142	7.30-7.35 uur	220	7.50-7.55 uur	282
7.15-7.20 uur	189	7.35-7.40 uur	224	7.55-8.00 uur	265

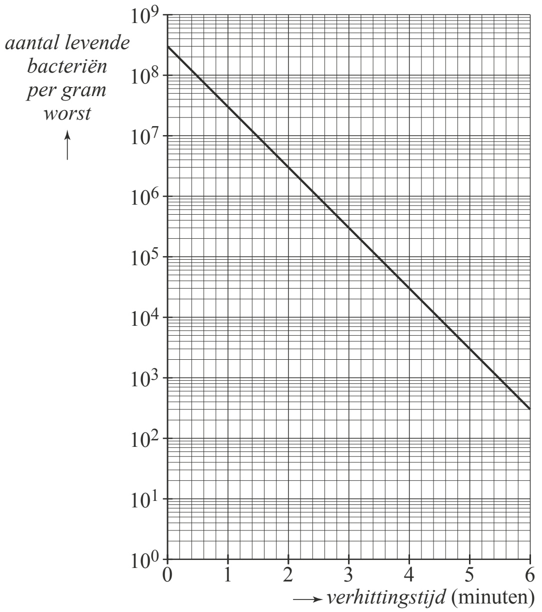
We nemen aan dat het aantal auto's per tijdsinterval gelijkmatig over het tijdsinterval verdeeld is. Je kunt dan met behulp van de formule van *C* bij benadering vaststellen vanaf welk moment de automobilisten vanwege de capaciteit een lagere snelheid dan 130 km per uur moesten gaan aanhouden.

3p **18** Bereken binnen welk tijdsinterval de automobilisten voor het eerst een lagere snelheid moesten gaan aanhouden.

Pasteurisatie

Sommige levensmiddelen kunnen langer houdbaar worden gemaakt door ze te verhitten. Door verhitting zullen de meeste bacteriën in deze levensmiddelen afsterven. Hoe langer er wordt verhit, hoe meer bacteriën er afsterven.
Bij een bepaald type worst is in figuur 1 het aantal levende bacteriën per gram worst uitgezet tegen de verhittingstijd in minuten. Daarbij is de verhittingstemperatuur 70 °C. In deze figuur, die vergroot op de uitwerkbijlage staat, is op de verticale as een logaritmische schaalverdeling gebruikt.

figuur 1

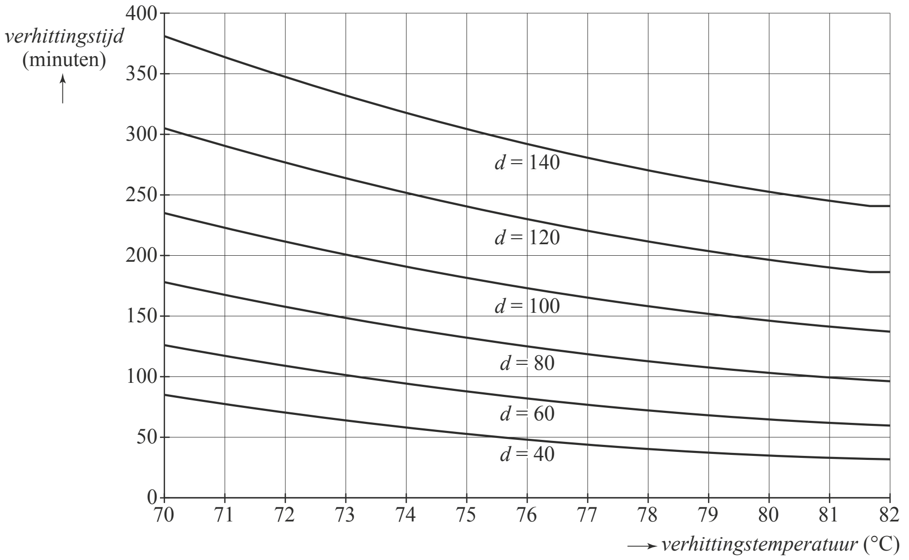


In figuur 1, zie ook de uitwerkbijlage, kun je bijvoorbeeld aflezen dat er bij aanvang van de verhitting 300 000 000 levende bacteriën per gram worst aanwezig zijn. Na 6 minuten verhitting is dit aantal gedaald tot 300.

3p **19** Bepaal na hoeveel minuten verhitting 90% van de bacteriën is afgestorven. Je kunt hierbij de uitwerkbijlage gebruiken.

Vaak worden worsten veel langer dan een paar minuten verhit. Als een verhitting onder de 100 °C heeft plaatsgevonden, noemt men dit pasteurisatie. De onderzoeksorganisatie TNO heeft richtlijnen opgesteld voor het pasteurisatieproces. Hiermee kan een slager die zelf worst maakt, bepalen welke verhittingstemperatuur en verhittingstijd nodig zijn.
In figuur 2 zie je de verhittingstemperaturen en verhittingstijden van worsten met diameters *d* van 40 tot en met 140 mm met tussenstappen van 20 mm. Deze figuur staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



In de figuur op de uitwerkbijlage kun je aflezen dat een worst met een diameter van 100 mm bij een verhittingstemperatuur van 80 °C een verhittingstijd van 145 minuten nodig heeft.

Een veelgebruikte verhittingstemperatuur is 75 °C.

4p **20** Teken in het assenstelsel op de uitwerkbijlage met behulp van figuur 2 een grafiek waarin de verhittingstijd is uitgezet tegen de diameter bij een verhittingstemperatuur van 75 °C.

In plaats van figuur 2 gebruiken sommige slagers ook wel formules om de verhittingstijd te berekenen. Bij een verhittingstemperatuur van 78 °C berekent men de verhittingstijd V dan met de formule:

$$V = 0{,}7d + 0{,}0089d^2$$

Hierin is V de verhittingstijd in minuten en d de diameter van de worst in mm.

3p **21** Bereken met de formule de verhittingstijd van een worst met een diameter van 4,5 cm bij een verhittingstemperatuur van 78 °C. Geef je antwoord in hele minuten.

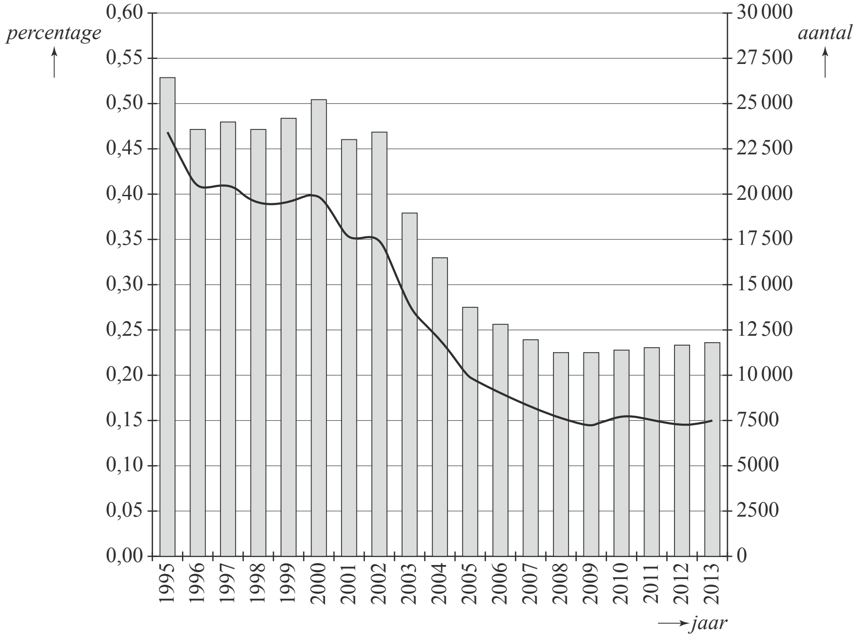
Een slager maakt worsten met verschillende diameters en kiest bij het pasteuriseren altijd voor een verhittingstemperatuur van 78 °C. Hij wil het pasteurisatieproces niet langer dan 2,5 uur laten duren.

4p **22** Bereken met de formule welke diameter deze worsten maximaal mogen hebben. Geef je antwoord in hele mm.

Autodiefstal

Elk jaar wordt een percentage van de auto's in Nederland gestolen. Dit percentage is aan het begin van deze eeuw flink gedaald. In de figuur is voor de jaren 1995 tot en met 2013 zowel het percentage gestolen personenauto's (kromme) als het aantal gestolen personenauto's (staafdiagram) weergegeven.

figuur **gestolen personenauto's Nederland 1995-2013**



In de figuur is te zien dat in de laatste weergegeven jaren het percentage gestolen personenauto's ongeveer gelijk aan 0,15% bleef.
Ook als dit de volgende jaren zo zou blijven, dan nog neemt het aantal gestolen personenauto's toe, omdat het aantal personenauto's in Nederland toeneemt. In de tabel is voor een aantal jaren het aantal personenauto's in Nederland weergegeven.

tabel

jaar	2001	2004	2007	2010	2013
aantal personenauto's in Nederland (in miljoenen)	6,55	6,90	7,24	7,59	7,93

Uit de tabel is af te leiden dat het aantal personenauto's bij benadering lineair toeneemt. Neem aan dat de komende jaren het percentage gestolen personenauto's blijft zoals in 2013 en dat het aantal personenauto's lineair blijft toenemen zoals in de tabel.

6p **23** Bereken in welk jaar er voor het eerst weer meer personenauto's gestolen zullen worden dan in 2005.

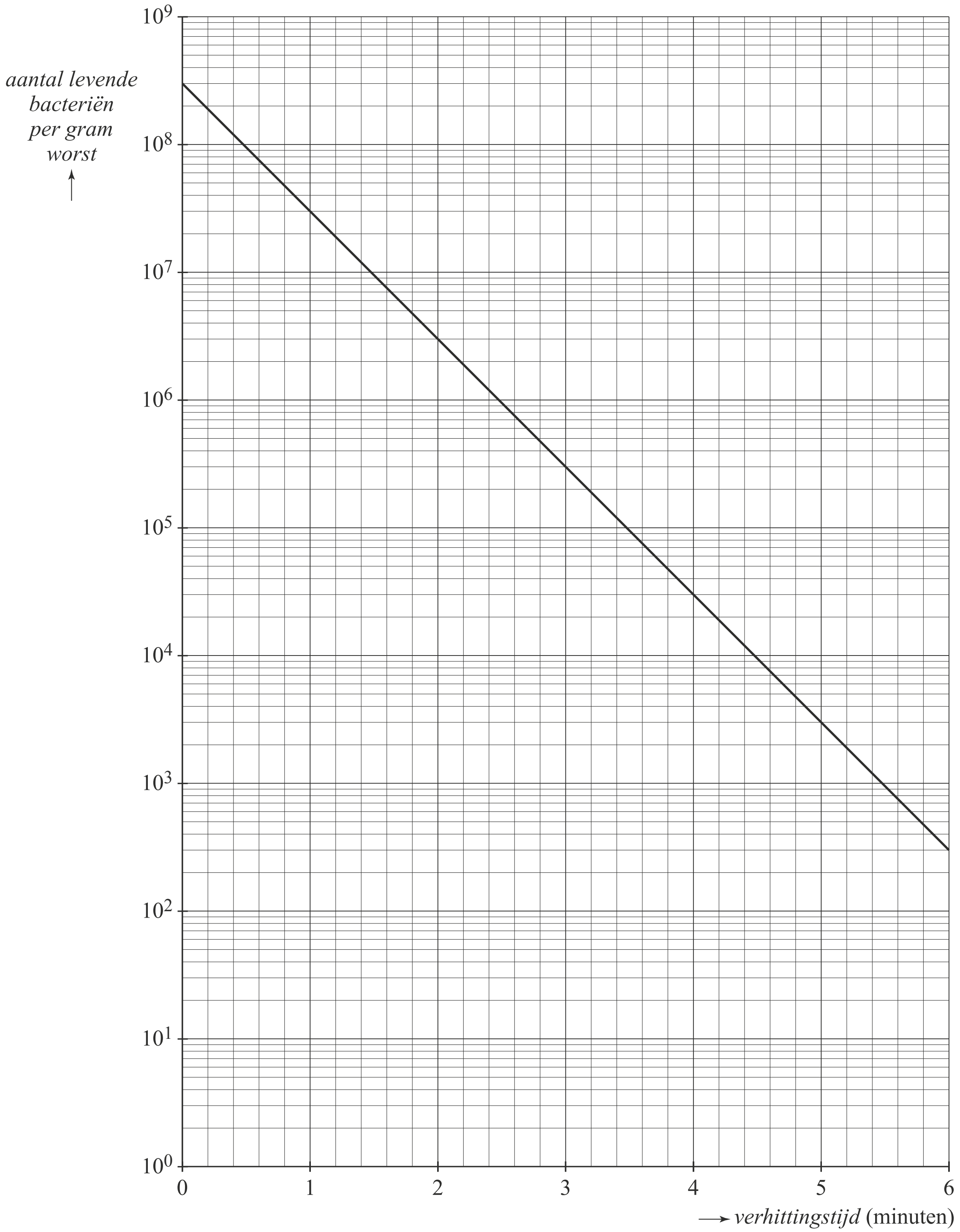
Uitwerkbijlage bij de vragen 8-12, 19 en 20

8 t/m 12

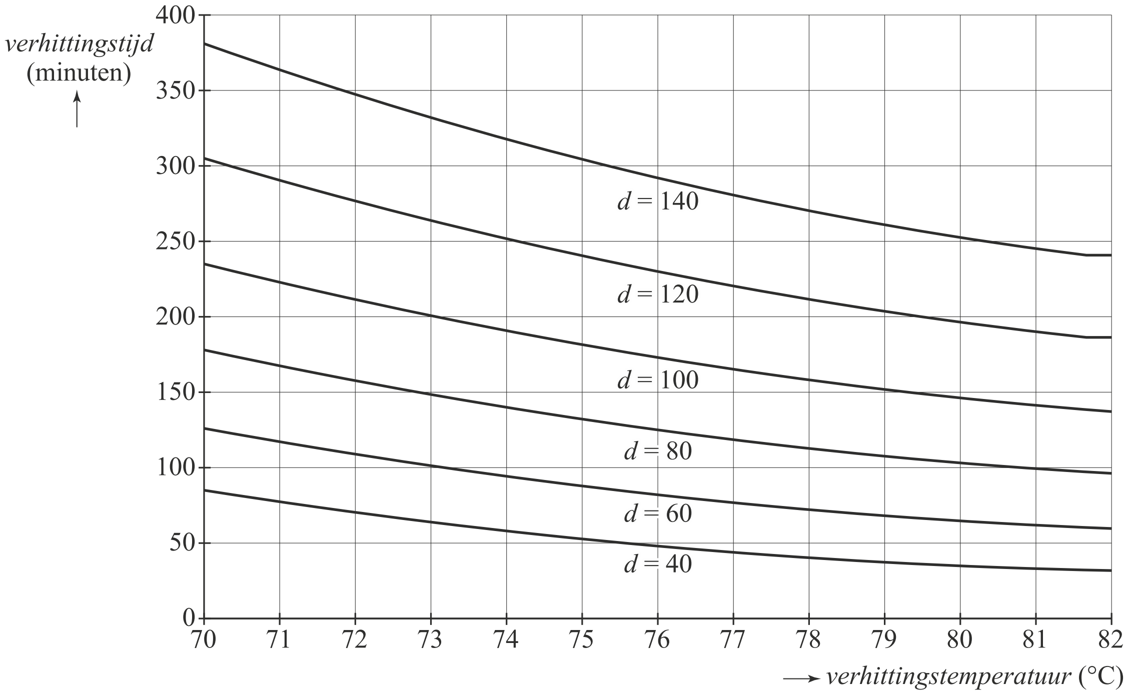
filosofie		
aantal score-punten	cijfer	cumulatieve frequentie
0	1,0	0
1	1,4	2
2	1,8	3
3	2,2	4
4	2,6	6
5	2,8	9
6	3,0	11
7	3,2	13
8	3,4	24
9	3,6	33
10	3,8	50
11	4,1	64
12	4,3	78
13	4,5	104
14	4,7	134
15	4,9	153
16	5,1	186
17	5,3	217
18	5,5	261
19	5,7	307
20	5,9	365
21	6,1	414
22	6,3	462
23	6,5	520
24	6,7	569
25	6,9	619
26	7,1	664
27	7,3	707
28	7,5	749
29	7,7	795
30	7,9	839
31	8,1	860
32	8,3	880
33	8,6	901
34	8,8	918
35	9,0	930
36	9,2	942
37	9,3	944
38	9,4	949
39	9,5	949
40	9,6	950
41	9,7	950
42	9,8	950
43	9,9	950
44	10,0	950

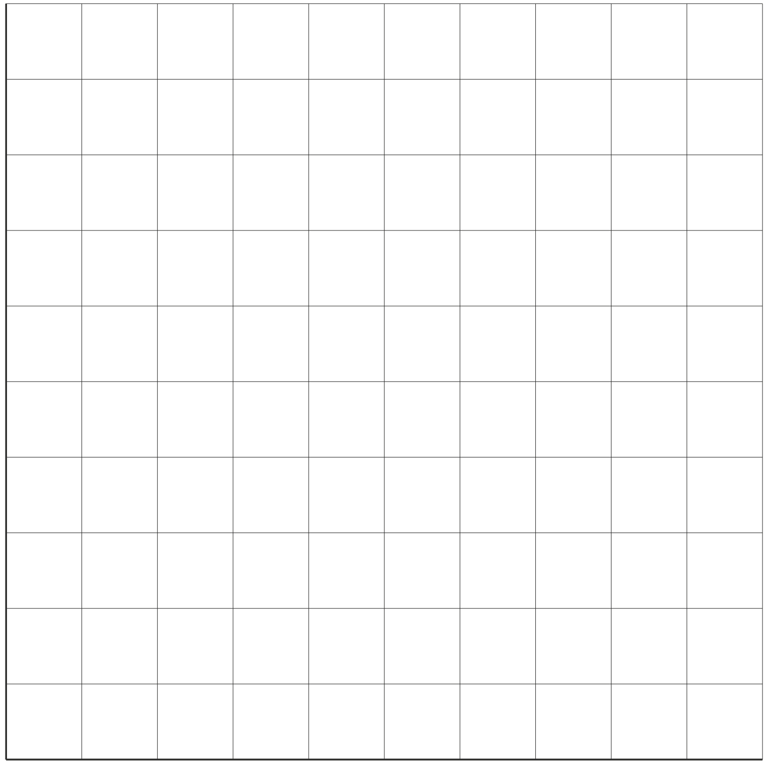
Engels		
aantal score-punten	cijfer	cumulatieve frequentie
0	1,0	0
1	1,1	0
2	1,2	0
3	1,3	0
4	1,4	1
5	1,5	1
6	1,6	1
7	1,7	1
8	1,8	2
9	1,9	7
10	2,0	8
11	2,1	9
12	2,3	18
13	2,5	33
14	2,7	55
15	2,9	100
16	3,1	154
17	3,3	216
18	3,4	305
19	3,6	430
20	3,8	630
21	4,0	845
22	4,2	1162
23	4,4	1527
24	4,6	2057
25	4,8	2698
26	5,0	3431
27	5,2	4401
28	5,4	5530
29	5,6	6898
30	5,7	8456
31	5,9	10 237
32	6,1	12 271
33	6,3	14 585
34	6,5	17 118
35	6,7	20 041
36	6,9	23 119
37	7,1	26 293
38	7,3	29 606
39	7,5	32 967
40	7,7	36 267
41	7,9	39 184
42	8,1	41 724
43	8,5	43 646
44	8,9	44 904
45	9,2	45 571
46	9,6	45 780
47	10,0	45 813

19



20





Hints bij examen 2019-I

1 Bereken eerst de bijbehorende waarden voor *I*. Gevraagd wordt naar de procentuele afname in **hele** procenten.

2 Gebruik de gegeven punten en de formule voor de richtingscoëfficiënt: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

3 Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden. De grafische rekenmachine mag gebruikt worden. Het gaat om hele maanden, dus ook de tabel van de grafische rekenmachine mag gebruikt worden.

4 De C-reeks bestaat uit verdunningen van 1 : 100. C6 wil zeggen dat deze verdunning zes keer wordt toegepast.

5 99,998% minder, dus er blijft 0,002% van de oorspronkelijke hoeveelheid over. Maak hier gebruik van om de verhouding 1 : ... te berekenen.

6 Gebruik de rekenregels: $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$, $(10^a)^b = 10^{a \cdot b}$ en $\frac{1}{10^a} = 10^{-a}$.

7 Stap 1: bereken de verhouding van D12.

Stap 2: noteer de inhoud van 20 zwembaden en de waterdruppel in dezelfde eenheid (1 liter is 1000 milliliter).

8 Welke score hoort bij een score lager dan tweemaal de standaardafwijking vanaf het gemiddelde? Volgens de vuistregel van de normale verdeling heeft 2,5% deze score. Bereken hoeveel procent dit is in de analysegroep met behulp van de tabel in de bijlage.

9 Mediaan, dus kijk welke score hoort bij 50% van de waarnemingen (kandidaten). Modus, dus kijk welke score het meest voorkomt. Bedenk dat je de grafiek en de tabel kunt gebruiken.

10 Het percentage onvoldoendes voor Engels kun je berekenen m.b.v. de tabel.

11 Maak gebruik van het formuleblad om het 95%-betrouwbaarheidsinterval te berekenen. Let op de afronding op het einde.

12 Welke gegevens heb je nodig om te bepalen of een kandidaat met een hoger cijfer voor filosofie ook een hoger cijfer voor Engels heeft behaald? Welke grafische weergave is geschikt om de samenhang tussen twee groepen gegevens te onderzoeken en welke gegevens zijn nodig om die weergave te maken?

13 Bereken *A* met de formule en vergelijk dit antwoord met de gegeven afstand.

14 Wat gebeurt er met $\frac{v}{188}$ als *v* toeneemt?

15 De hoeveelheid wegdek is gelijk aan de veilige afstand plus de lengte van de auto.

16 Maak gebruik van de grafische rekenmachine. Plot de grafiek en bepaal het maximum.

17 Welke vergelijking hoort bij de vraag? Maak gebruik van de grafische rekenmachine.

18 Bereken eerst *C* (het aantal per uur) en dan het aantal per 5 minuten.

19 In figuur 1 staat op de verticale as het aantal **levende** bacteriën per gram worst. Bereken eerst dit aantal.

20 Teken in figuur 2 een verticale lijn bij 75 °C en lees bij elke *d* af welke verhittingstijd hierbij hoort.

21 Let vooral op de eenheden: 4,5 cm is gegeven, maar *d* is in mm. Het antwoord wordt in hele minuten gevraagd.

© ThiemeMeulenhoff

22 Het pasteurisatieproces mag niet langer dan 2,5 uur duren. De verhittingstijd in minuten is dan…

23 Hoeveel auto's werden er in 2005 gestolen? Maak verder gebruik van: het percentage gestolen personenauto's blijft gelijk aan dat van 2013 en het aantal personenauto's blijft lineair toenemen zoals in de tabel.

Uitwerkingen bij examen 2019-I

Stil asfalt

4p **1** *Gevraagd wordt hoeveel procent I afneemt in hele procenten.*
d is geproduceerd geluid in dB.
I is geluidsintensiteit in milliwatt per m^2.
De hoeveelheid geproduceerd geluid daalt van 80 dB naar 74 dB.

eerste manier:
$d = 80$ en $d = 74$ invullen in $I = 10^{0,1 \cdot d - 9}$
$d = 80$ geeft $I = 10^{0,1 \cdot 80 - 9} = 0,1$ [1p] en $d = 74$ geeft $I = 10^{0,1 \cdot 74 - 9} = 0,025118\ldots$ [1p]
De procentuele verandering is $\frac{0,1 - 0,025118\ldots}{0,1} \cdot 100\,\% = 74,88\ldots \approx 75\%$. [2p]
Dus de geluidsintensiteit neemt af met 75%.

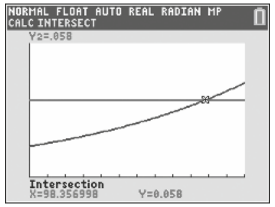
tweede manier:
$d = 80$ en $d = 74$ invullen in $I = 10^{0,1 \cdot d - 9}$
$d = 80$ geeft $I = 10^{0,1 \cdot 80 - 9} = 0,1$ [1p] en $d = 74$ geeft $I = 10^{0,1 \cdot 74 - 9} = 0,025118\ldots$ [1p]

$d = 80$	$d = 74$
$I = 0,1$	$I = 0,025118\ldots$
100%	?

$? = \frac{100 \cdot 0,025118\ldots}{0,1} = 25,1188\ldots \approx 25\%$, [1p] dus de geluidsintensiteit neemt af met 75%. [1p]

2p **2** *Bereken de richtingscoëfficiënt met behulp van de gegeven punten. Geef het antwoord in drie decimalen.*
Gegeven: de lijn gaat door (0; 73,7) en (84; 77,0).
Richtingscoëfficiënt $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{77,0 - 73,7}{84 - 0}$ [1p] $= 0,03928\ldots \approx 0,039$ [1p]

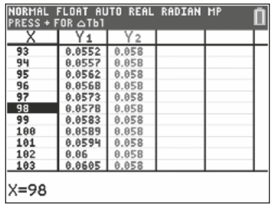
3p **3** *Gebruik de laatste formule en geef het antwoord in hele maanden.*
Het asfalt moet worden vervangen als $I > 0,058$.



eerste manier, met intersect:
De vergelijking $I = 10^{0,1 \cdot (0,04t + 73,7) - 9} = 0,058$ moet worden opgelost. [1p]

Voer in $y_1 = 10^{0,1 \cdot (0,04x + 73,7) - 9}$ en $y_2 = 0,058$.

Intersect geeft $x = t \approx 98,35\ldots$ [1p] dus het asfalt gaat 98 maanden mee (zie figuur). [1p]



X	Y1	Y2
93	0.0552	0.058
94	0.0557	0.058
95	0.0562	0.058
96	0.0568	0.058
97	0.0573	0.058
98	0.0578	0.058
99	0.0583	0.058
100	0.0589	0.058
101	0.0594	0.058
102	0.06	0.058
103	0.0605	0.058

tweede manier, met behulp van tabel:
De vergelijking $I = 10^{0,1 \cdot (0,04t + 73,7) - 9} = 0,058$ moet worden opgelost. [1p]

Voer in $y_1 = 10^{0,1 \cdot (0,04x + 73,7) - 9}$ en $y_2 = 0,058$.

Het gaat om hele maanden, dus de tabel kan hier gebruikt worden.
Zie schermafbeelding: $t = 97$ geeft 0,0573, $t = 98$ geeft 0,0578, $t = 99$ geeft 0,0583 [1p], dus het asfalt gaat 98 maanden mee (zie tabel). [1p]

Homeopathische middelen

3p **4** *D3 betekent dat de verdunning van de D-reeks 1 : 10 driemaal wordt toegepast.*
De C-reeks heeft een verdunning van 1 : 100 per keer. [1p]
Dus bij C6 wordt de verdunning 1 : 100 zes keer toegepast.
$100^6 = 1000\,000\,000\,000 = 10^{12}$ (of $100^6 = (10^2)^6 = 10^{12}$), [1p]
dus het homeopathische middel C6 bestaat voor $\frac{1}{10^{12}}$ of $\frac{1}{1\,000\,000\,000\,000}$ deel uit oertinctuur. [1p]

3p **5** *Bij de C-reeks is de verdunning 1 : 100, dus elke keer blijft er 1% over en wordt de hoeveelheid 99% minder.*

eerste manier, met verhoudingen:
Bij de LM-reeks wordt de hoeveelheid elke keer 99,998% minder, dus er blijft 0,002% over. [1p]
Oftewel $\frac{0{,}002}{100} = \frac{2}{100\,000} = \frac{1}{50\,000}$ deel, [1p] dus het getal op de puntjes is 50 000. [1p]

tweede manier, met de groeifactor:
Bij de LM-reeks wordt de hoeveelheid elke keer 99,998% minder, dus er blijft 0,002% over. [1p]
Er blijft dus 0,00002^e deel over, oftewel de groeifactor = $0{,}00002 = \frac{2}{100\,000} = \frac{1}{50\,000}$ [1p]
Dit is een verdunning van 1 : 50 000, dus het getal op de puntjes is 50 000. [1p]

3p **6** *Gebruik de rekenregels voor machten:* $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$, $(10^a)^b = 10^{a \cdot b}$ en $\frac{1}{10^a} = 10^{-a}$.
$100 = 10^2$ en $\frac{1}{10} = \frac{1}{10^1} = 10^{-1}$ [1p] en $\left(\frac{1}{10}\right)^n = (10^{-1})^n = 10^{-n}$ [1p] dus
$P = 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n = 10^2 \cdot (10^{-1})^n = 10^2 \cdot 10^{-n} = 10^{2-n}$ [1p]

4p **7** *Een waterdruppel is ongeveer 0,05 milliliter en een zwembad heeft een inhoud van ongeveer 2,5 miljoen liter.*

eerste manier, m.b.v. de verhouding van de totale inhouden:
D12 geeft een verdunning van 10^{12}, dus een verhouding van
1 : 1 000 000 000 000 = 1 : 10^{12}. [1p]
1 liter = 1000 milliliter, dus 2,5 miljoen liter is 2 500 000 liter = 2 500 000 000 milliliter. [1p]
De inhoud van 20 zwembaden is dan 20 · 2 500 000 000 = 50 000 000 000 milliliter. [1p]
De verhouding inhoud waterdruppel : inhoud 20 zwembaden =
0,05 : 50 000 000 000 = 0,01 : 10 000 000 000 = 1 : 1 000 000 000 000 = 1 : 10^{12}.
Conclusie: de bewering klopt. [1p]

tweede manier, m.b.v. het aantal waterdruppels in 20 zwembaden:
D12 geeft een verdunning van 10^{12}, dus een verhouding van
1 : 1 000 000 000 000 = 1 : 10^{12}. [1p]
De inhoud van 20 zwembaden is 20 · 2 500 000 = 50 000 000 liter. [1p]
1 milliliter = 0,001 liter, dus 1 waterdruppel is 0,05 milliliter = 0,00005 liter. [1p]
Er gaan $\frac{50\,000\,000}{0{,}00\,005} = 10^{12}$ waterdruppels in 20 zwembaden, dus de verhouding is gelijk aan 1 : 10^{12}. [1p]
Conclusie: de bewering klopt.

Examenanalyse

4p **8** *Gebruik de tabel uit de bijlage of figuur 1 en de vuistregels voor de normale verdeling.*

eerste manier, m.b.v. procenten:
Volgens de vuistregel van de normale verdeling heeft 2,5% een score lager dan tweemaal de standaardafwijking vanaf het gemiddelde. [1p]
Gegeven is dat de gemiddelde score gelijk is aan 22,5 en de standaardafwijking 6,9.
Een score die meer dan tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde is dus een score lager dan 22,5 – 2 · 6,9 = 8,7. [1p] Dit zijn dus alle kandidaten met scorepunten 0 t/m 8.
De tabel geeft een cumulatieve frequentie, dus het aantal kandidaten met een score van 0 t/m 8 is 24. [1p]
Het totale aantal is 950, dus 24 is $\frac{24}{950} \cdot 100 = 2{,}52\ldots$% van het totaal. [1p]
Conclusie: het percentage is gelijk aan wat je verwacht volgens de normale verdeling.

tweede manier, m.b.v. aantallen:
Volgens de vuistregel van de normale verdeling heeft 2,5% een score lager dan tweemaal de standaardafwijking vanaf het gemiddelde. [1p] Het totale aantal is 950.
2,5% van 950 is 23,75. Dus je verwacht volgens de normale verdeling 24 kandidaten. [1p]
Gegeven is dat de gemiddelde score gelijk is aan 22,5 en de standaardafwijking 6,9.
Een score die meer dan tweemaal de standaardafwijking lager ligt dan het gemiddelde is dus een score lager dan 22,5 – 2 · 6,9 = 8,7. [1p] Dit zijn dus alle kandidaten met scorepunten 0 t/m 8.
De tabel geeft een cumulatieve frequentie, dus het aantal kandidaten met een score van 0 t/m 8 is 24 (zie linker tabel). [1p]
Conclusie: het aantal is gelijk aan wat je verwacht volgens de normale verdeling.

4p **9** *Mediaan, dus kijk welke score hoort bij 50% van de waarnemingen. Modus, dus kijk welke score het meest voorkomt.*
In figuur 2 is af te lezen dat de modus gelijk is aan een score van 39 punten. [1p]
Er worden 45 813 kandidaten geanalyseerd, dus de mediaan ligt bij de (45 813 + 1) : 2 = 22 907^e kandidaat. [1p] Deze kandidaat heeft 36 scorepunten [1p] (want het aantal scorepunten van de 20 042^e tot en met de 23 119^e kandidaat is 36, zie tabel).
Conclusie: het verschil tussen de modus (39) en de mediaan (36) is 3. [1p]

3p **10** *Percentage onvoldoendes (cijfer lager dan 5,5) voor Engels.*
Uit de tabel is af te lezen dat 5530 van de 45 813 kandidaten een onvoldoende hebben (lager dan 5,5) voor Engels. [1p]
Het percentage kandidaten met een onvoldoende voor Engels is dus gelijk aan
$\frac{5530}{45\,813} \cdot 100\,\%$ [1p] = 12,07 … % [1p]
Voor het examen filosofie behaalde 22,8% een onvoldoende. De helft van 22,8% is 11,4%.
Conclusie: het percentage onvoldoendes voor het examen Engels (12,07%) is iets meer dan de helft van 22,8%.

3p **11** *Zie de formulekaart voor het 95%-betrouwbaarheidsinterval, gebruik de gegevens filosofie.*

eerste manier, m.b.v. 22,8% onvoldoende (zie tekst boven onderdeel 10):
De steekproefproportie $p = 0{,}228$ en de steekproefomvang $n = 950$.
Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ [1p] $= 0{,}228 \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}228 \cdot (1-0{,}228)}{950}} = 0{,}228 \pm 0{,}0272...$ [1p]

De ondergrens = 0,228 − 0,0272... = 0,2007...
Met één decimaal en in procenten 20,1%.
De bovengrens = 0,228 + 0,0272... = 0,2552...
Met één decimaal en in procenten 25,5%.
Conclusie: het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [20,1; 25,5] [1p] in procenten en in één decimaal nauwkeurig.

tweede manier, m.b.v. aantallen uit de tabel:
217 van de 950 kandidaten haalden een cijfer lager dan 5,5, dus

de steekproefproportie $p = \frac{217}{950} = 0{,}2284...$ en de steekproefomvang $n = 950$.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval is

$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ [1p] $= 0{,}2284... \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{0{,}2284... \cdot (1-0{,}2284...)}{950}} = 0{,}2284... \pm 0{,}0272...$ [1p]

De ondergrens = 0,2284... − 0,0272... = 0,2011...
Met één decimaal en in procenten 20,1%.
De bovengrens = 0,2284... + 0,0272... = 0,2556...
Met één decimaal en in procenten 25,6%.
Conclusie: het 95%-betrouwbaarheidsinterval is [20,1; 25,6] in procenten en in één decimaal nauwkeurig. [1p]

3p **12** *De samenhang tussen de scores van de examens filosofie en Engels onderzoeken.*
De vraag is of een hoge score voor filosofie ook een hoge score voor Engels betekent.
Gevraagd wordt dus naar de samenhang tussen de scores per kandidaat.
Het meest geschikt is dan een puntenwolk met bijvoorbeeld op de horizontale as het cijfer voor filosofie en op de verticale as het cijfer voor Engels, waarbij de gegevens per kandidaat worden weergegeven. [1p]
De extra informatie die nodig is:

- Welke kandidaten in beide groepen zitten. [1p]
- Per kandidaat het cijfer voor filosofie en het cijfer voor Engels. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

File voorkomen

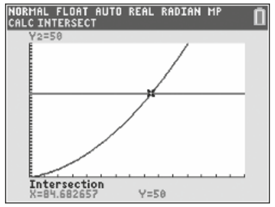
3p **13** *v is de snelheid van beide auto's in km per uur en A is de veilige afstand in meters.*
Snelheid $v = 93$ km per uur en $A = 50$ meter.

eerste manier, m.b.v. gegeven v:

$v = 93$ invullen in $A = v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0{,}14\right)$ geeft $A = 93 \cdot \left(\frac{93}{188} + 0{,}14\right) = 59{,}025...$ [2p]

Een veilige afstand is iets meer dan 59 meter, dus 50 meter is niet veilig.
Conclusie: de achterste automobilist houdt niet de minimale veilige afstand aan. [1p]

tweede manier, m.b.v. gegeven A:



$A = 50$ invullen in $A = v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0{,}14\right)$ geeft $50 = v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0{,}14\right)$

Grafische rekenmachine met $y_1 = x \cdot \left(\frac{x}{188} + 0{,}14\right)$ en $y_2 = 50$ [1p]

WINDOW bijvoorbeeld [0,150] × [0,80].
Calc intersect geeft $x = v = 84{,}6...$ km per uur. [1p]
Een veilige snelheid is maximaal 84,6... km per uur. Bij een hogere snelheid hoort een grotere veilige afstand, dus bij 93 km per uur hoort een grotere veilige afstand dan 50 meter.
Conclusie: de achterste automobilist houdt niet de minimale veilige afstand aan. [1p]

3p **14** *Beredeneer zonder getallenvoorbeeld, gebruik de formule.*

Als v toeneemt, dan neemt $\frac{v}{188}$ toe [1p] en dus ook $\frac{v}{188} + 0{,}14$ [1p]

v neemt toe en $\frac{v}{188} + 0{,}14$ neemt toe, dus neemt ook $v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0{,}14\right)$ toe. [1p]

Conclusie: als v toeneemt, neemt ook de veilige afstand A toe.

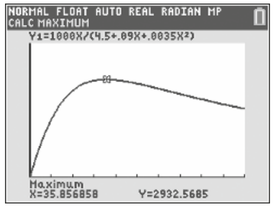
3p **15** *W is de hoeveelheid wegdek in meters die een automobilist nodig heeft bij een veilige afstand. Getallen op de puntjes in twee decimalen!*
Hoeveelheid wegdek W = veilige afstand + lengte auto

$W = A + 4{,}50$ [1p] $= v \cdot \left(\frac{v}{188} + 0{,}14\right) + 4{,}50 = v \cdot \left(\frac{1}{188} \cdot v + 0{,}14\right) + 4{,}50$ [1p] $=$

$\frac{1}{188} \cdot v^2 + 0{,}14 \cdot v + 4{,}50 = 0{,}0056... \cdot v^2 + 0{,}14 \cdot v + 4{,}50$

Conclusie: $W = 0{,}01 \cdot v^2 + 0{,}14 \cdot v + 4{,}50$ [1p]

3p **16** *v is de snelheid in km per uur en C de capaciteit in aantal per uur.*
Gevraagd wordt v bij de grootste waarde van C.



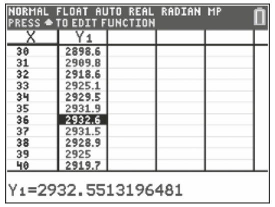
Maximale waarde van $C = \frac{1000v}{4{,}5 + 0{,}09v + 0{,}0035\,v^2}$

eerste manier, m.b.v. CALC maximum:

Voer in $y_1 = \frac{1000x}{4{,}5 + 0{,}09x + 0{,}0035\,x^2}$

WINDOW bijvoorbeeld [0,100] × [0,4000].
Calc maximum geeft $x = v = 35{,}85...$ km per uur (en maximum $y = C = 2932{,}5...$). [2p]
Conclusie: de snelheid is 36 km per uur (in hele km per uur). [1p]

tweede manier, m.b.v. de tabel:
v wordt gevraagd in hele km per uur.
C is maximaal 2932,6 bij $v = 36$ (zie de tabel). [2p]
Conclusie: de snelheid is 36 km per uur (in hele km per uur). [1p]

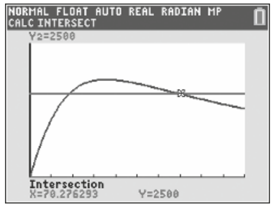


© ThiemeMeulenhoff

4p **17** *C is minimaal 2500.*

De vergelijking $2500 = \dfrac{1000v}{4{,}5 + 0{,}09v + 0{,}0035\,v^2}$ moet worden opgelost. [1p]

Voer in $y_1 = \dfrac{1000x}{4{,}5 + 0{,}09x + 0{,}0035\,x^2}$ en $y_2 = 2500$.



WINDOW bijvoorbeeld [0,100] × [0,4000].
Calc intersect geeft $x = v = 70{,}27...$ km per uur [2p] (of $v = 18{,}...$).
Conclusie: de maximumsnelheid is 70 km per uur. [1p]
Opmerking: C ligt op of boven 2500 vanaf het eerste snijpunt v = 18 km per uur tot en met v = 70 km per uur. De maximumsnelheid die dan wordt aangegeven op het bord is 70 km per uur.

3p **18** *C is het aantal per uur, in de tabel is het aantal per 5 minuten gegeven.*
Bereken eerst *C* (aantal per uur) als $v = 130$ km per uur.

$C = \dfrac{1000v}{4{,}5 + 0{,}09v + 0{,}0035\,v^2} = \dfrac{1000 \cdot 130}{4{,}5 + 0{,}09 \cdot 130 + 0{,}0035 \cdot 130^2} = 1725{,}28...$ [1p]

1725,28... auto's per uur komt overeen met $\dfrac{1725{,}28...}{12} = 143{,}...$ auto's per 5 minuten. [1p]

De snelheid wordt verlaagd als het aantal auto's per 5 minuten groter is dan 143.
In de tabel is te zien dat het aantal auto's per 5 minuten vanaf 7.15 uur groter is dan 143.
Conclusie: binnen het tijdsinterval 7.15-7.20 uur moeten de automobilisten voor het eerst een lagere snelheid aanhouden. [1p]

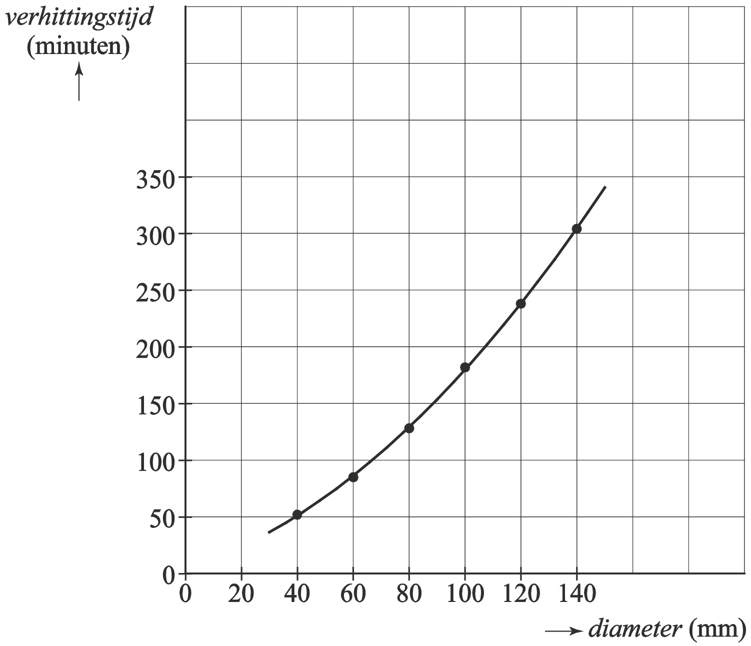
Pasteurisatie

3p **19** *Op de verticale as staat het aantal levende bacteriën per gram worst!*
90% van de bacteriën is afgestorven als nog 10% van de bacteriën in leven is. [1p]
10% van 300 000 000 (300 miljoen) is 30 000 000 (30 miljoen).
30 miljoen ligt tussen 10^7 en 10^8. De tweede horizontale lijn boven 10^7 is 30 000 000.
Hierbij hoort een verhittingstijd van 1 minuut. [1p]
Conclusie: na 1 minuut is 90% van de bacteriën afgestorven. [1p]

4p **20** *Verhittingstemperatuur uitzetten tegen de diameter (horizontale as).*
Uit figuur 2 aflezen: d en de verhittingstijd bij een verhittingstemperatuur van 75 °C.

d in mm	40	60	80	100	120	140
verhittingstijd in minuten	53	88	133	183	240	305

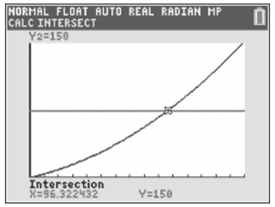
[2p]



[2p]

3p **21** *Gevraagd wordt de verhittingstijd in hele minuten.*
Gegeven zijn de verhittingstemperatuur van 78 °C en de diameter van 4,5 cm, dus $d = 45$ mm. [1p]
De formule $V = 0{,}7d + 0{,}0089\,d^2$ geldt voor een verhittingstemperatuur van 78 °C.
$d = 45$ invullen geeft $V = 0{,}7d + 0{,}0089\,d^2 = 0{,}7 \cdot 45 + 0{,}0089 \cdot 45^2 = 49{,}5225$ [1p]
Conclusie: de verhittingstijd in hele minuten is 50 minuten. [1p]

4p **22** *Let op de eenheden en afronding.*
De verhittingstemperatuur is 78 °C, dus geldt $V = 0{,}7d + 0{,}0089\,d^2$.
Het pasteurisatieproces mag niet langer duren dan 2,5 uur.
Dus de verhittingstijd *V* is maximaal $2{,}5 \cdot 60 = 150$ minuten. [1p]
Opgelost moet worden: $V = 0{,}7d + 0{,}0089\,d^2 = 150$ [1p]
Voer in $y_1 = 0{,}7d + 0{,}0089\,x^2$ en $y_2 = 150$.
WINDOW bijvoorbeeld [0,150] × [0,300].
Calc intersect geeft $x = d = 96{,}322...$ mm. [1p]
Conclusie: de diameter van de worsten mag maximaal 96 mm zijn. [1p]



Autodiefstal

6p **23** *In de figuur hoort de linker as bij het percentage gestolen personenauto's (kromme) en de rechter as bij het aantal gestolen personenauto's (staafdiagram).*
Gevraagd wordt in welk jaar voor het eerst weer meer personenauto's gestolen zullen worden dan in 2005.
Gegeven zijn:
- het percentage gestolen personenauto's blijft gelijk aan dat van 2013 (zie figuur)
- het aantal personenauto's blijft lineair toenemen zoals in de tabel

eerste manier, met behulp van de toename van het aantal gestolen auto's per jaar:
Aantal gestolen auto's per jaar vanaf 2013 berekenen met behulp van de gegevens:
- het percentage gestolen personenauto's blijft gelijk aan dat van 2013
- het aantal personenauto's blijft lineair toenemen zoals in de tabel

In 2001 zijn er 6 550 000 auto's en in 2013 zijn dit er 7 930 000 (zie tabel),

dus per jaar neemt het aantal auto's toe met $\frac{7\,930\,000 - 6\,550\,000}{12} = 115\,000$ (want lineair). [1p]
Het percentage gestolen personenauto's blijft gelijk aan dat van 2013, dus 0,15%.
Dus de toename van het aantal gestolen personenauto's is: $0{,}0015 \cdot 115\,000 = 172{,}5$. [1p]
Aantal gestolen personenauto's aflezen uit de figuur (histogram):
in 2005 zijn dit er 13 750 [1p] en in 2013 zijn dit er 12 000. [1p]
Het aantal jaar dat nodig is om boven de 13 750 uit te komen vanaf 2013 is
$\frac{13\,750 - 12\,000}{172{,}5} = 10{,}144\ldots$ [1p] dus 11 jaar. Dus het jaar is 2013 + 11 = 2024.
Conclusie: in 2024 worden er voor het eerst weer meer personenauto's gestolen dan in 2005. [1p]

tweede manier, met behulp van een vergelijking van het aantal gestolen auto's:
Aantal gestolen personenauto's in 2005 is 13 750 [1p] (zie figuur, histogram).
Een formule opstellen voor het aantal gestolen personenauto's vanaf 2013 met behulp van de gegevens:
- het percentage gestolen personenauto's blijft gelijk aan dat van 2013
- het aantal personenauto's blijft lineair toenemen zoals in de tabel

Formule voor het aantal personenauto's A vanaf 2013:
Neem $t = 0$ is 2001 en $t = 12$ is 2013. De lijn gaat dan door (0, 6 550 000) en (12, 7 930 000).
r.c. $= \frac{7\,930\,000 - 6\,550\,000}{12} = 115\,000$ [1p]
Vergelijking lijn: $A = 115\,000 \cdot t + 6\,550\,000$ met A aantal personenauto's en t tijd in jaren vanaf 2001. [1p]
Het percentage gestolen personenauto's blijft gelijk aan dat van 2013, dus 0,15%.
De formule voor het aantal gestolen personenauto's is dus:
$0{,}0015 \cdot A = 0{,}0015 \cdot (115\,000 \cdot t + 6\,550\,000) = 172{,}5 \cdot t + 9825$
De vergelijking $172{,}5 \cdot t + 9825 = 13\,750$ oplossen [1p] (mag ook met de grafische rekenmachine):
$172{,}5 \cdot t = 13\,750 - 9825 = 3925$ dus $t = \frac{3925}{172{,}5} = 22{,}75\ldots$ en $t = 0$ is 2001. [1p]
Op $t = 23$ worden er voor het eerst meer personen auto's gestolen dan 13 750, dus dat is in 2024.
Conclusie: in 2024 worden er voor het eerst weer meer personenauto's gestolen dan in 2005. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Examen 2019-II

Kieviten

De kievit is een weidevogel. Het aantal kieviten in Nederland neemt af. Dit komt onder andere door intensivering van de landbouw en door uitbreiding van het stedelijk gebied.
We maken in deze opgave onderscheid tussen de aantallen broedende en niet-broedende kieviten.

In de periode 1990-2010 nam het aantal broedende kieviten elk jaar met 3% af.

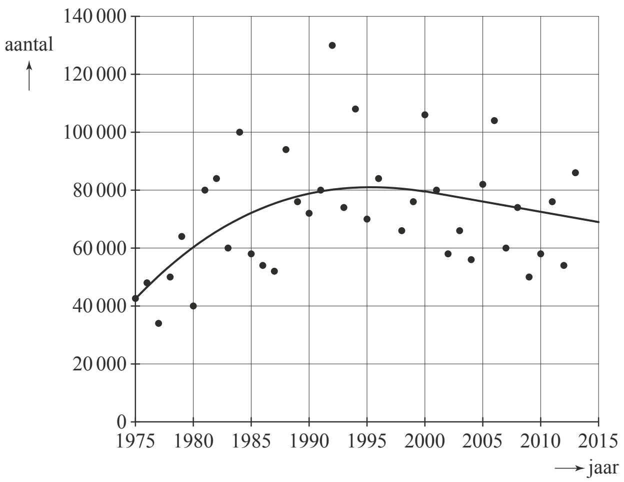
4p **1** Bereken met hoeveel procent het aantal broedende kieviten in de periode 1990-2010 is afgenomen. Geef je antwoord in hele procenten.

Na 2010 nam het aantal broedende kieviten in Nederland elk jaar met 5% af. Neem aan dat deze afname zo doorgaat.

4p **2** Bereken in welk jaar het aantal broedende kieviten voor het eerst minder dan de helft zal zijn van het aantal in 2010.

In de figuur zie je het aantal kieviten voor een aantal jaren weergegeven.
Hierbij gaat het om een ander deel van de populatie, namelijk de niet-broedende kieviten. In de figuur is ook de trendlijn getekend. Dit is de lijn die zo goed mogelijk bij de punten past.

figuur niet-broedende kieviten



Er is een jaar waarin het aantal niet-broedende kieviten het meest afwijkt van de trendlijn.

4p **3** Bereken voor dat jaar hoeveel procent het aantal niet-broedende kieviten afwijkt van de trendlijn. Geef je antwoord in hele procenten.

Vanaf het jaar 2000 neemt het aantal niet-broedende kieviten ongeveer lineair af. Neem aan dat deze afname na het jaar 2015 op dezelfde wijze doorgaat.

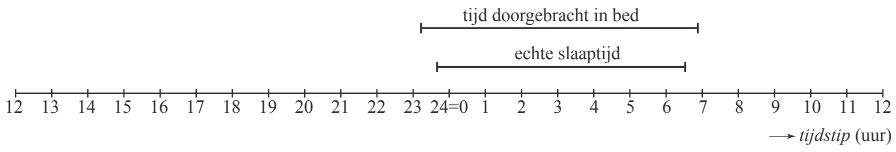
4p **4** Bereken met behulp van de bovenstaande gegevens het aantal niet-broedende kieviten in het jaar 2021. Geef je antwoord in een geheel aantal duizendtallen.

Slaaponderzoek bij de San

In moderne samenlevingen hebben veel mensen een slaapprobleem. Sommige onderzoekers zijn van mening dat de aanwezigheid van allerlei soorten van kunstmatig licht daarbij een rol speelt. Over de slaapgewoonten van mensen die niet beschikken over kunstmatig licht is veel minder bekend. Daarom is er slaaponderzoek verricht bij verschillende bevolkingsgroepen in Afrika. In deze opgave gaan we in op dit onderzoek bij een van die bevolkingsgroepen, namelijk de San.

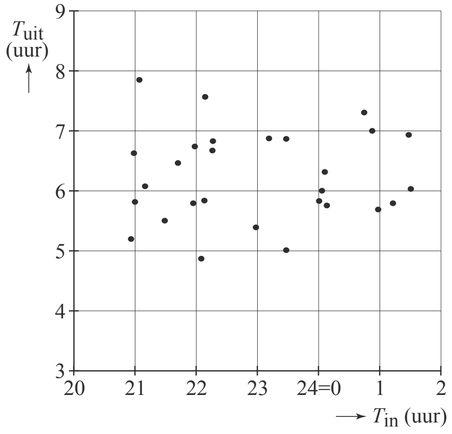
Verschillende leden van deze bevolkingsgroep kregen bij dit onderzoek een apparaatje om hun pols. Hiermee wordt bijgehouden op welke tijdstippen iemand naar bed gaat, in slaap valt, wakker wordt en opstaat. Het apparaatje geeft deze gegevens elke 24 uur weer in een zogenoemd actogram.
In figuur 1 zie je een actogram van deelnemer San-19.

figuur 1 actogram van San-19



Van deze deelnemer zijn alle actogrammen van de periode 15 januari tot en met 11 februari geanalyseerd. Er is onder andere gezocht naar een verband tussen het tijdstip van naar bed gaan T_{in} en het tijdstip van opstaan T_{uit}. Daartoe zijn T_{in} en T_{uit} weergegeven in een spreidingsdiagram. Zie figuur 2, die ook op de uitwerkbijlage staat.

figuur 2 spreidingsdiagram actogrammen van San-19



2p **5** Geef in de figuur op de uitwerkbijlage aan welk punt in het spreidingsdiagram afkomstig is van het actogram van deelnemer San-19 in figuur 1.

Van deelnemer San-19 is de spreidingsbreedte van T_{in} … keer zo groot als de spreidingsbreedte van T_{uit} .

3p **6** Bereken welk getal er op de puntjes moet staan. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage. Geef je antwoord in één decimaal.

Op grond van figuur 2 trekken de onderzoekers de volgende twee conclusies:
I Er lijkt bij deelnemer San-19 geen verband te zijn tussen T_{in} en T_{uit}.
II De verdeling van de tijdstippen T_{in} lijkt bij deelnemer San-19 niet op een normale verdeling.

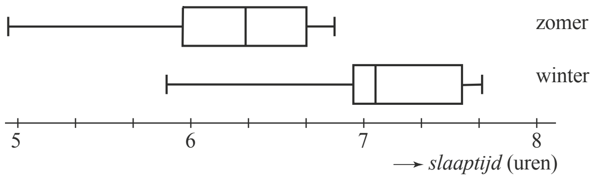
4p **7** Geef bij elke conclusie een geldig argument dat de onderzoekers gebruikt zouden kunnen hebben ter onderbouwing van die conclusie.

Niet alle tijd die in bed wordt doorgebracht is echte slaaptijd. Vaak is er tijd nodig om in slaap te komen of blijft iemand ’s morgens nog even liggen na het wakker worden. Uit metingen bij deelnemer San-19 is gebleken dat hij om daadwerkelijk 8 uur te slapen, 9 uur in bed moet liggen.

4p **8** Onderzoek in hoeveel van de gemeten nachten deelnemer San-19 zich aan de stelregel ‘minstens 8 uur slaap per nacht’ gehouden heeft. Gebruik de figuur op de uitwerkbijlage.

Het onderzoek is eenmaal in de zomer en eenmaal in de winter uitgevoerd. Van elke deelnemer aan het onderzoek is zowel van de zomerperiode als van de winterperiode de gemiddelde echte slaaptijd berekend. Deze gemiddelde slaaptijden van alle deelnemers zijn weergegeven in twee boxplots. Zie figuur 3.

figuur 3



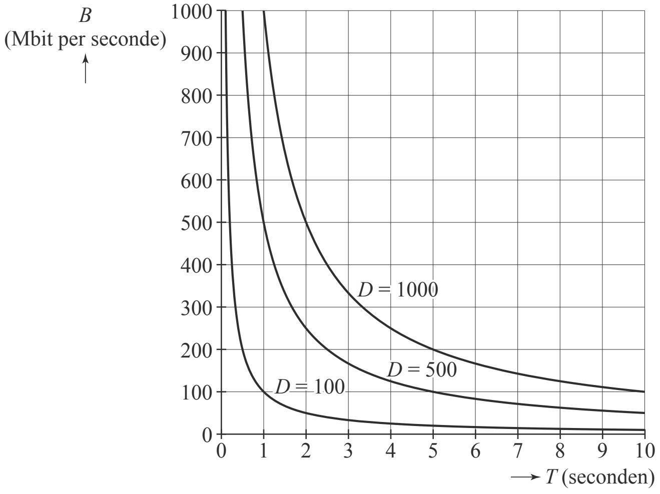
De onderzoekers trekken op basis van dit onderzoek de volgende twee conclusies:
I Bij de deelnemers aan het onderzoek is het verschil tussen de echte slaaptijd in de zomerperiode en de slaaptijd in de winterperiode groot.
II Bij de deelnemers aan het onderzoek is de slaaptijd in de zomer gemiddeld 53 minuten korter dan de slaaptijd in de winter.

4p **9** Leg bij elk van deze twee conclusies uit of je die wel of niet kunt trekken op grond van figuur 3. Gebruik waar mogelijk een vuistregel van het formuleblad.

Bandbreedte

Het internet wordt steeds intensiever gebruikt. Daarmee stijgt de vraag naar snellere internetverbindingen die grotere hoeveelheden data (digitale informatie) per tijdseenheid kunnen verwerken.
De bedrijven die dit mogelijk moeten maken, de providers, proberen door middel van onderzoek de groeiende vraag naar sneller internet te voorspellen. Een van de onderzochte zaken is de downloadsnelheid[1], aangegeven in Mbit/s (megabit per seconde).
Bij elke internetverbinding beperkt de **bandbreedte** de snelheid. De bandbreedte van een verbinding is de maximale hoeveelheid data die verwerkt kan worden per tijdseenheid.
In figuur 1 is voor drie datahoeveelheden *D* (in Mbit) het verband weergegeven tussen de verwerkingstijd *T* (in seconden) en de bijbehorende bandbreedte *B* (in Mbit/s) bij het downloaden. Deze figuur staat vergroot afgedrukt op de uitwerkbijlage.

figuur 1



Bij een bandbreedte van 300 Mbit/s duurt het langer om 1000 Mbit te downloaden dan 500 Mbit.

3p **10** Bepaal hoeveel seconden langer. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage. Geef je antwoord in één decimaal.

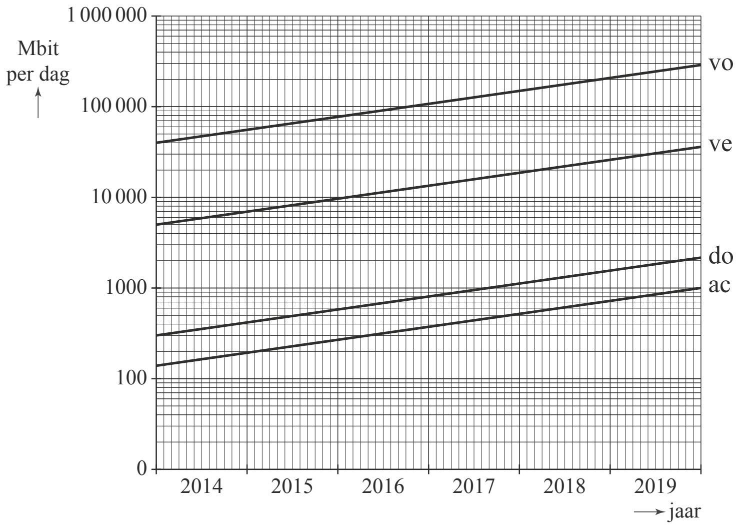
In figuur 1 zie je voor $D = 1000$ het omgekeerd evenredig verband tussen *B* en *T* getekend.

3p **11** Stel bij deze waarde van *D* een formule op waarbij je *B* uitdrukt in *T*. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage. Licht je antwoord toe.

noot 1 Downloaden is het binnenhalen van digitale informatie van een andere computer.

Er is ook onderzoek gedaan naar de te verwachten groei van de hoeveelheid data die een huishouden per dag uploadt[1].
In figuur 2 zie je de voorspelde gemiddelde hoeveelheden van vier groepen huishoudens. De verticale as heeft een logaritmische schaal. Op de horizontale as is elk jaar in 12 maanden verdeeld. Figuur 2 staat vergroot op de uitwerkbijlage.

figuur 2 gemiddelde uploadhoeveelheid per huishouden per dag



vo = voorlopers (intensief internetgebruik)
ve = vernieuwers (meer dan gemiddeld internetgebruik)
do = doorsneegebruikers (normaal internetgebruik)
ac = achterblijvers (gering internetgebruik)

In figuur 2 zie je dat de gemiddelde uploadhoeveelheid per huishouden per dag voor alle groepen huishoudens in de loop der jaren toeneemt.
De achterblijvers hebben later dan de doorsneegebruikers een gemiddelde uploadhoeveelheid van 900 Mbit per huishouden per dag.

3p **12** Bepaal hoeveel jaar en maanden dit later is. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

Voor iedere groep geldt dat het jaarlijkse groeipercentage in de periode 2014-2019 constant is.
Een lezer van het onderzoeksrapport beweert:
“Het jaarlijkse groeipercentage van de gemiddelde uploadhoeveelheid per huishouden per dag van de achterblijvers is lager dan dat van de vernieuwers.”

5p **13** Onderzoek of deze lezer gelijk heeft. Je kunt hierbij gebruikmaken van de figuur op de uitwerkbijlage.

noot 1 Uploaden is het verzenden van digitale informatie naar een andere computer.

Nierfunctie

Kreatinine is een afbraakproduct dat door de nieren uit het bloed wordt gefilterd. De hoeveelheid kreatinine in het bloed geeft aan hoe goed de nieren functioneren. Hoe kleiner de hoeveelheid kreatinine in het bloed, des te beter de nierfunctie.

Om een nauwkeuriger beeld van het functioneren van de nieren te krijgen, moet rekening worden gehouden met de lichaamsbouw en de leeftijd van de persoon die onderzocht wordt.
In veel gevallen wordt hiervoor de *GFR* (Glomerular Filtration Rate, de filtratiesnelheid van de nieren in milliliter per minuut) berekend. Er bestaan hiervoor meerdere formules.
Een daarvan is formule 1. Deze formule is voor mannen en vrouwen verschillend.

formule 1

mannen	vrouwen
$GFR = \dfrac{(140 - L) \cdot G}{0{,}81 . K}$	$GFR = 0{,}85 \cdot \dfrac{(140 - L) \cdot G}{0{,}81 \cdot K}$

Hierin is *L* de leeftijd van de patiënt in jaren, *G* het lichaamsgewicht in kg en *K* de hoeveelheid kreatinine in micromol per liter.

Thomas en Julia zijn een tweeling van 45 jaar. Ze laten een onderzoek doen naar het functioneren van hun nieren.
Thomas is een man, hij weegt 78 kg. Julia is een vrouw, ze weegt 69 kg.
Bij beiden is de hoeveelheid kreatinine in het bloed 95 micromol per liter.

3p **14** Bereken hoe groot het verschil is tussen de *GFR* van Thomas en de *GFR* van Julia. Geef je antwoord in een geheel aantal milliliter per minuut.

Nicolien is een vrouw. Ze laat ieder jaar de waarde van haar *GFR* bepalen. Neem aan dat haar lichaamsgewicht gelijk blijft. De waarden van haar *GFR* worden in de loop der jaren groter.

3p **15** Beredeneer, zonder getallenvoorbeelden te gebruiken, met behulp van formule 1 dat de nierfunctie van Nicolien beter wordt.

Voor mannen van 40 jaar en een gewicht van 80 kg is formule 1 te herleiden tot een formule van de vorm GFR = ... $\cdot$ $K^{...}$, waarbij er op de puntjes getallen staan.

3p **16** Geef deze herleiding en geef daarbij de getallen die op de puntjes komen te staan in gehelen.

Een andere formule die vaak gebruikt wordt, is formule 2. Ook deze formule is voor mannen en vrouwen verschillend.

formule 2

mannen	vrouwen
$GFR = 32\,788 \cdot K^{-1{,}154} \cdot L^{-0{,}203}$	$GFR = 24\,329 \cdot K^{-1{,}154} \cdot L^{-0{,}203}$

Hierin is L de leeftijd van de patiënt in jaren en K de hoeveelheid kreatinine in micromol per liter.

Formule 2 geeft de *GFR* voor patiënten die een gewicht hebben dat past bij hun lengte. Het voordeel van deze formule is dat het lichaamsgewicht niet nodig is in de berekening.

Klaas is een man van 33 jaar met een gewicht dat past bij zijn lengte. De hoeveelheid kreatinine in zijn bloed is 95 micromol per liter. Formule 1 en formule 2 geven bij Klaas precies dezelfde uitkomst.

4p **17** Bereken het gewicht van Klaas. Geef je antwoord in gehele kg.

Bij de *GFR*-waarden berekend met formule 2, is door de NVKC[1] de volgende tabel opgesteld.

tabel

GFR	nierfunctie
≥ 60	normaal
30 – < 60	matige afname
15 – < 30	ernstige afname
< 15	uitval nierfunctie

Bij Jiska, een vrouw van 56 jaar, wordt een normale nierfunctie geconstateerd. Haar *GFR* is berekend met formule 2.

4p **18** Bereken hoeveel kreatinine Jiska maximaal in haar bloed heeft. Geef je antwoord in een geheel aantal micromol per liter.

noot 1 Nederlandse Vereniging voor Klinische Chemie en Laboratoriumgeneeskunde.

Elektrisch rijden

In 2016 telde Nederland ongeveer 8,1 miljoen personenauto's. De meeste personenauto's rijden op benzine of diesel. Het aantal personenauto's dat op lpg (gas) rijdt, neemt de laatste jaren af.
Elektrische en hybride personenauto's[1] nemen juist toe in aantal. Hun gezamenlijk aandeel was in 2016 met ongeveer 2,6% nog betrekkelijk klein.

Uit het rapport 'Maak elektrisch rijden groot: acht acties voor doorbraak bij particulieren' kan worden afgeleid dat er een ambitie bestaat om het gezamenlijk aandeel elektrische en hybride personenauto's in 2020 op ten minste 5,2% te krijgen.

Om de ontwikkelingen in kaart te brengen, is onderstaande tabel beschikbaar. Hierin staat informatie over het aantal personenauto's in Nederland.

tabel **aantal personenauto's (× 1000)**

type	2012	2016
benzine of diesel	7482	7725
lpg (gas)	203	165
elektrisch en hybride gezamenlijk	70	211
totaal	7755	8101

We nemen aan dat in de periode 2012-2016 gold:
1 het aantal personenauto's dat op benzine of diesel reed, nam jaarlijks met hetzelfde aantal toe;
2 het aantal personenauto's dat op lpg (gas) reed, nam jaarlijks met hetzelfde aantal af;
3 het gezamenlijk aantal elektrische en hybride personenauto's nam jaarlijks met hetzelfde percentage toe.

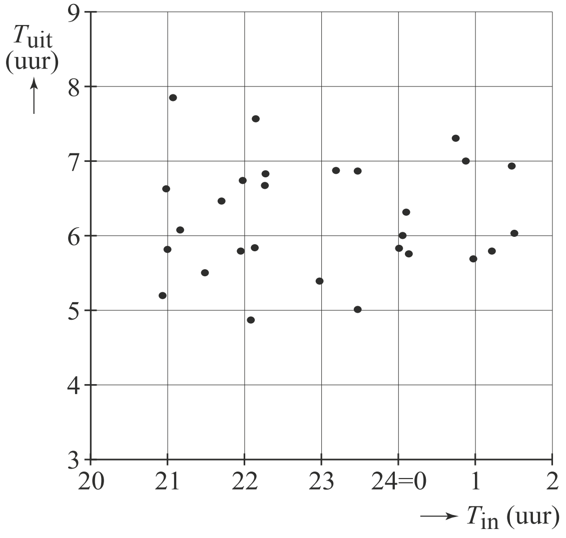
Het is de vraag of de hierboven genoemde ambitie gehaald wordt als de groei bij elk van de drie bovenstaande punten zich na 2016 op dezelfde wijze blijft voortzetten.

6p **19** Onderzoek, gebruikmakend van bovenstaande gegevens en aannames, of het gezamenlijk aandeel elektrische en hybride personenauto's in 2020 ten minste 5,2% zal zijn.

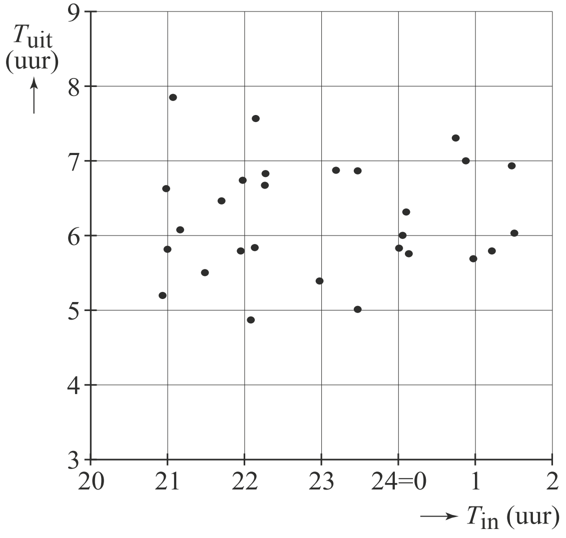
noot 1 Elektrische auto's rijden volledig op een elektromotor, hybrides hebben zowel een elektromotor als een verbrandingsmotor.

Uitwerkbijlage bij de vragen 5, 6, 8 10-11 en 12-13

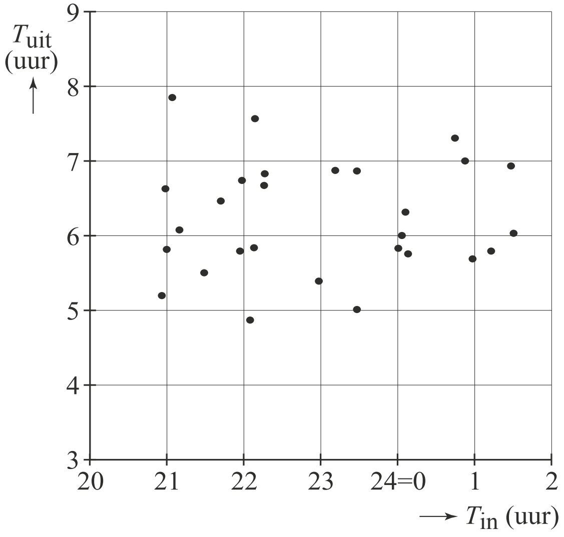
5



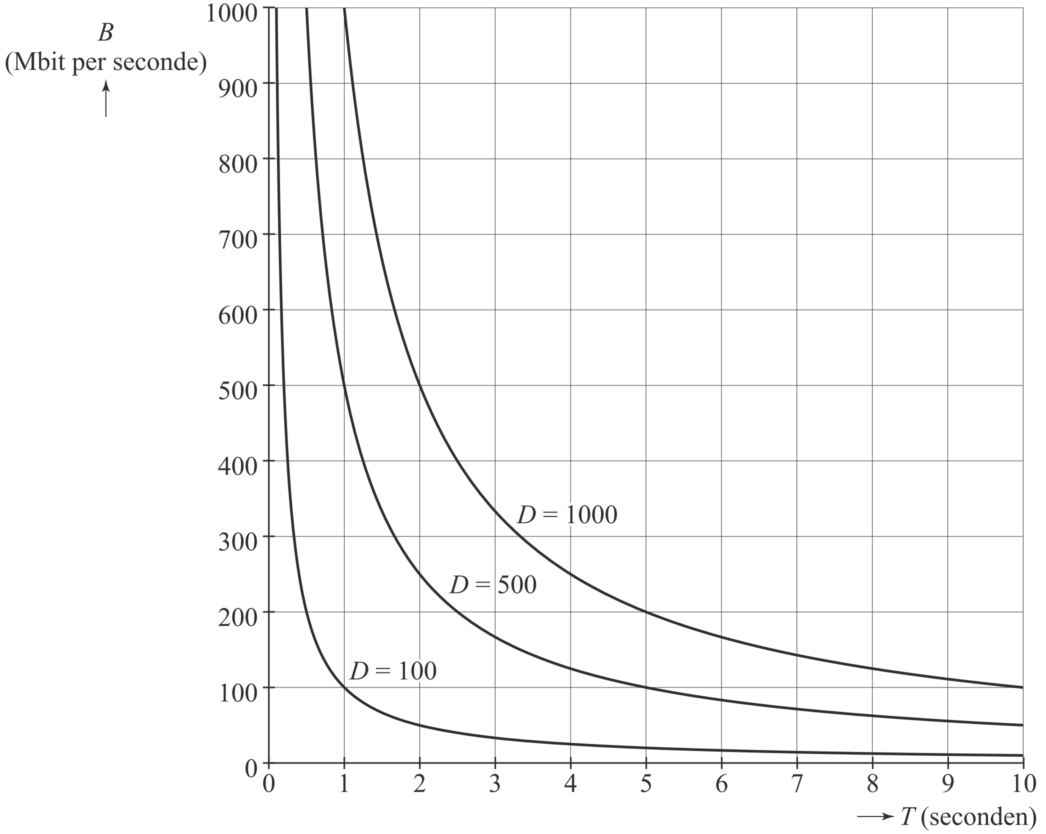
6



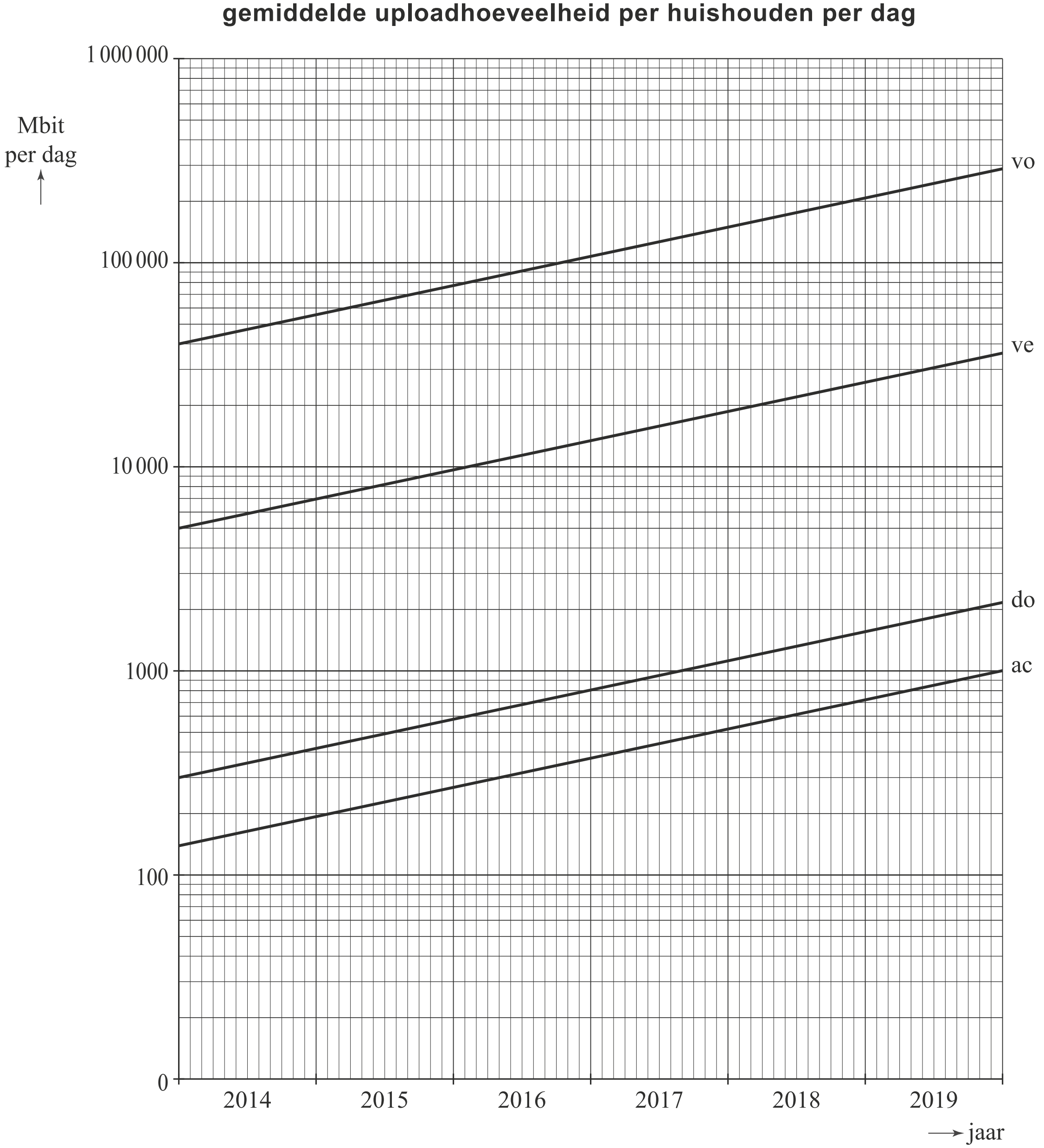
8



10, 11



12, 13



vo = voorlopers (intensief internetgebruik)
ve = vernieuwers (meer dan gemiddeld internetgebruik)
do = doorsneegebruikers (normaal internetgebruik)
ac = achterblijvers (gering internetgebruik)

Hints bij examen 2019-II

1 Jaarlijks 3% afname. Bepaal eerst de groeifactor per jaar en per 20 jaar.

2 Jaarlijks 5% afname en gevraagd wordt wanneer het aantal voor het eerst minder dan de helft is. Bedenk welke vergelijking opgelost moet worden.

3 Procentuele afwijking, dus gebruik $\frac{\text{nieuw} - \text{oud}}{\text{oud}} \cdot 100\%$. Let op de afronding.

4 Lineaire afname, dus bereken eerst de afname per jaar.

5 T_{in} is het tijdstip van naar bed gaan en T_{uit} het tijdstip van opstaan. Gebruik in figuur 1 de bovenste lijn (tijd doorgebracht in bed) om de waarden af te lezen.

6 Spreidingsbreedte = grootste waarde – kleinste waarde.

7 Bij een normale verdeling liggen de meeste waarnemingen rond het midden. Is dat hier het geval?

8 Voor minstens 8 uur slaap per nacht moet hij 9 uur in bed liggen. Ga na wat dat betekent voor T_{in} en T_{uit}.

9 Gebruik van het formuleblad ‘twee boxplots vergelijken’.

10 Maak gebruik van figuur 1 en de horizontale lijn door 300 Mbit per seconde.

11 Omgekeerd evenredig verband tussen B en T. Dus $B \cdot T$ = constante of $B = \frac{\text{constante}}{T}$. Maak gebruik van een punt van de grafiek om de constante te berekenen.

12 Trek een horizontale hulplijn bij 900 Mbit per dag.

13 Neem voor de achterblijvers en voor de vernieuwers twee punten op de grafiek en bereken als eerste stap de groeifactor per jaar.

14 Gebruik de grafische rekenmachine om eerst de *GFR* van Thomas en Julia te berekenen.

15 Beredeneer met de formule, dus een getallenvoorbeeld levert geen punten op. Ga na wat er met L gebeurt als ze een volgend jaar haar *GFR* gaat bepalen, wat gebeurt er met G, wat met de teller, …

16 Vul alle bekende waarden in en maak gebruik van $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

17 Vul alle gegevens in en combineer beide formules.

18 Vul eerst alle gegevens in formule 2 in en bedenk welke vergelijking opgelost moet worden voor een normale nierfunctie (zie ook de tabel).

19 Benzine of diesel en lpg groeien lineair, elektrisch en hybride gezamenlijk groeien exponentieel. Bereken eerst de verwachte aantallen in 2020 per type en vervolgens het gevraagde percentage.

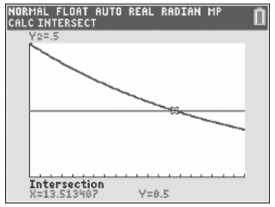
© ThiemeMeulenhoff

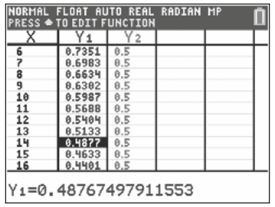
Uitwerkingen bij examen 2019-II

Kieviten

4p **1** *In de periode 1990-2010 nam het aantal elk jaar met 3% af.*
3% afname per jaar, dus de groeifactor is 0,97 per jaar. [1p]
1990-2010 is een periode van 20 jaar. De groeifactor per 20 jaar is $0{,}97^{20} = 0{,}547379...$ [2p]
Dus het afnamepercentage per 20 jaar is $(1 - 0{,}54379...) \cdot 100\% = 45{,}620...$
Conclusie: het aantal broedende kieviten is met 46% afgenomen. [1p]

4p **2** *Na 2010 neemt het aantal broedende kieviten af met 5% per jaar.*
5% afname per jaar, dus de groeifactor is 0,95 per jaar.
Per t jaar is de groeifactor $0{,}95^t$.
Gevraagd wordt wanneer de hoeveelheid voor het eerst minder dan de helft is, dus wanneer $0{,}95^t$ voor het eerst minder is dan 0,5.
De vergelijking $0{,}95^t = 0{,}5$ [1p] oplossen met de grafische rekenmachine, bijvoorbeeld met intersect, of met de tabel.
Voer in $y_1 = 0{,}95^x$ en $y_2 = 0{,}5$ met $x = t = 0$ is het jaar 2010 [1p]





Intersect geeft $x = t = 13{,}5...$ jaar of met de tabel $t = 13$ geeft groeifactor 0,5133 en $t = 14$ geeft 0,4877 [1p]
Op $t = 13$ is het aantal nog net niet gehalveerd, op $t = 14$ is er minder dan de helft over.
Conclusie: 2024 is het eerste jaar waarin het aantal minder dan de helft is. [1p]

4p **3** *Gevraagd wordt de procentuele afwijking in het jaar met de grootste afwijking ten opzichte van de trendlijn.*
In 1992 is de afstand van de stip ten opzichte van de trendlijn het grootst.
Het aantal niet-broedende kieviten in 1992 is 130 000 (aflezen). [1p] Volgens de trendlijn is het aantal 80 000. [1p]
De afwijking is $\frac{130\,000 - 80\,000}{80\,000} \cdot 100\% = 62{,}5\%$ [1p]
Conclusie: de afwijking ten opzichte van de trendlijn in hele procenten is 63%. [1p]
Opmerking: bij het aflezen van het aantal kieviten is een marge van 2000 toegestaan.

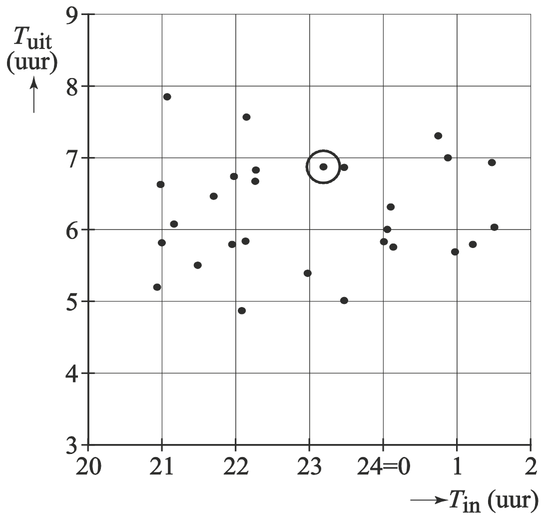
4p **4** *Lineaire afname vanaf 2000.*

eerste manier, met behulp van de afname per jaar:
In 2000 zijn er 80 000 niet-broedende kieviten en in 2015 zijn dit er 69 000 (zie de trendlijn in de figuur). [1p]
De afname per jaar is $\frac{80\,000 - 69\,000}{15} = 733{,}33...$ (want lineair). [1p]
In 2015 zijn er 69 000 kieviten, dus in 2021 zijn dit er $69\,000 - 6 \cdot 733{,}33... = 64\,600$. [1p]
Conclusie: in 2021 zijn er 65 000 kieviten (afgerond op een geheel aantal duizendtallen). [1p]

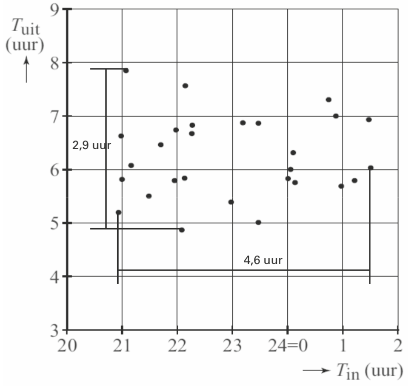
tweede manier, met behulp van een vergelijking van de lijn:
In 2000 zijn er 80 000 niet-broedende kieviten en in 2015 zijn dit er 69 000 (zie de trendlijn in de figuur). [1p]
Neem $t = 0$ is 2000 en $t = 15$ is 2015. De lijn gaat dan door (0, 80 000) en (15, 69 000).
r.c. $= \frac{80\,000 - 69\,000}{0 - 15} = -733{,}33...$ [1p]
Vergelijking lijn: $K = -733{,}33... \cdot t + 80\,000$ met K aantal niet-broedende kieviten, t tijd in jaren vanaf 2000.
In 2021, dus $t = 21$ invullen geeft $K = -733{,}33... \cdot 21 + 80\,000 = 64\,600$. [1p]
Conclusie: in 2021 zijn er 65 000 kieviten (afgerond op een geheel aantal duizendtallen). [1p]
Opmerking: bij het aflezen van het aantal kieviten is een marge van 2000 toegestaan.

Slaaponderzoek bij de San

2p **5** In het spreidingsdiagram zijn T_{in} en T_{uit} af te lezen.
T_{in} is het tijdstip van naar bed gaan en T_{uit} het tijdstip van opstaan, dus gebruik in figuur 1 de bovenste lijn (tijd doorgebracht in bed) om de waarden af te lezen.
T_{in} is ongeveer 23,2 en T_{uit} is ongeveer 6,9. Dit komt het beste overeen met het omcirkelde punt in de figuur. [2p]

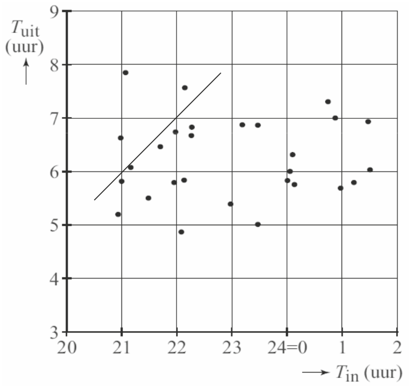


3p **6** *Spreidingsbreedte = grootste waarde – kleinste waarde.*
Voor T_{uit} geldt: de grootste waarde is 7,8 uur en de kleinste waarde is 4,9 uur, dus de spreidingsbreedte is 7,8 – 4,9 = 2,9 uur. [1p]
Voor T_{in} geldt: de grootste waarde is 1,5 uur na middernacht en de kleinste waarde is 20,9 uur.
20,9 uur is 24 – 20,9 = 3,1 uur tot middernacht, dus de spreidingsbreedte is 3,1 + 1,5 = 4,6 uur. [1p]
$\frac{4{,}6}{2{,}9} = 1{,}58...$
Conclusie: de spreidingsbreedte van T_{in} is 1,6 keer zo groot als de spreidingsbreedte van T_{uit}. [1p]
Opmerkingen: de spreidingsbreedtes mogen ook door opmeten worden bepaald. De tijdstippen mogen worden afgelezen met een marge van 0,1 uur.



4p **7** Een argument voor conclusie I: de spreiding van de punten is heel willekeurig. Er is geen duidelijke trend te zien.
De punten liggen niet op of rond een lijn, dus er is geen verband tussen T_{in} en T_{uit}. [2p]
Een argument voor conclusie II: bij een normale verdeling liggen de meeste punten in het midden en hoe verder je naar buiten gaat, hoe minder punten. In de figuur liggen ook aan de randen veel punten en er liggen niet meer punten in het midden.
Er is dus geen sprake van een normale verdeling. [2p]

4p **8** *Om 8 uur te slapen is het nodig om 9 uur in bed te liggen.*
Het verschil tussen T_{uit} en T_{in} moet minstens 9 uur zijn.
Als hij om 21 uur naar bed gaat, mag hij dus pas vanaf 6 uur opstaan.
Als hij om 22 uur naar bed gaat mag hij vanaf 7 uur opstaan. [1p]
Als hij om 23 uur naar bed gaat mag hij vanaf 8 uur opstaan, etc.
Trek een rechte lijn door deze punten. [1p] Dan is te zien dat hij bij 3 gemeten waarnemingen minstens 9 uur in bed ligt (dit zijn de punten boven de lijn) en dus 8 uur slaapt. [2p]



4p **9** *Zie formuleblad 'twee boxplots vergelijken'.*
Als de boxen elkaar niet overlappen, dan zeggen we 'het verschil is groot'. Dus conclusie I klopt, want de boxen overlappen elkaar niet. [2p]
Alleen de boxplots zijn gegeven. Uit een boxplot kun je geen gemiddelde aflezen.
Conclusie II kun je dus niet trekken op grond van figuur 3. [2p]

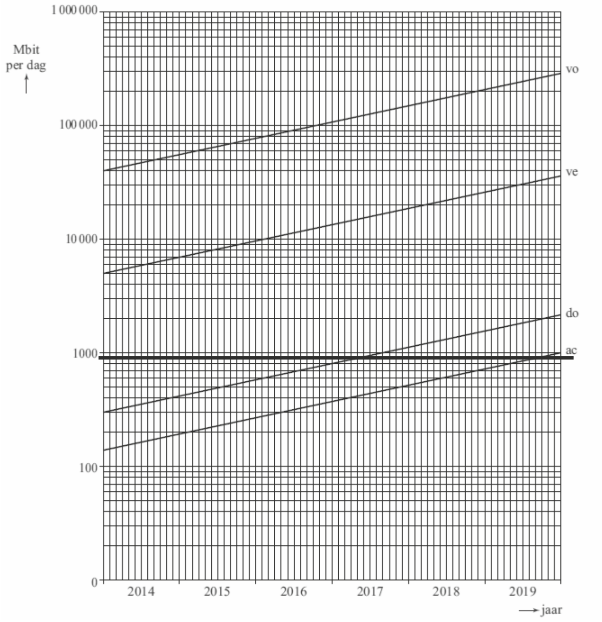
Bandbreedte

3p **10** *Trek in de figuur een horizontale lijn bij B = 300 Mbit per seconde.*
$B = 300$ Mbit per seconde en $D = 1000$ geeft $T = 3{,}3$ seconden. [1p]
$B = 300$ Mbit per seconde en $D = 500$ geeft $T = 1{,}7$ seconden. [1p]
Conclusie: het downloaden van 1000 Mbit duurt $3{,}3 - 1{,}7 = 1{,}6$ seconden langer dan het downloaden van 500 Mbit. [1p]
Opmerkingen: bij het aflezen is een marge van 0,1 seconde toegestaan. Het verschil van 1,6 seconden mag ook zijn bepaald door opmeten langs de horizontale lijn B = 300.

3p **11** *Omgekeerd evenredig dus $B \cdot T$ = constant. Eén punt is voldoende om de constante uit te rekenen.*
Een roosterpunt op de grafiek bij $D = 1000$ is bijvoorbeeld $T = 2$ en $B = 500$ (of $T = 1$ en $B = 1000$ of $T = 5$ en $B = 200$ of $T = 10$ en $B = 100$). [1p]
Omgekeerd evenredig verband, dus $B \cdot T = 2 \cdot 500$ dus $B \cdot T = 1000$ [1p]
Conclusie: B uitgedrukt in T geeft $B = \frac{1000}{T}$ [1p]

© ThiemeMeulenhoff

3p **12** *Gebruik figuur 2 en trek een horizontale lijn bij 900 Mbit per dag.*
De lijn 900 Mbit per dag snijdt de grafiek van de doorsneegebruikers bij maand 4 van 2017 [1p] en de grafiek van de achterblijvers bij maand 8 van 2019. [1p]
Conclusie: de achterblijvers hebben 2 jaar en 4 maanden later een uploadhoeveelheid van 900 Mbit per huishouden per dag. [1p]
Opmerking: bij het aflezen is een marge van 1 maand toegestaan.



5p **13** *Gebruik figuur 2.*

eerste manier, m.b.v. de grafiek:
In de figuur met enkellogaritmisch papier lopen de lijnen van de achterblijvers en de vernieuwers evenwijdig. [2p]
Als de grafieken op enkellogaritmisch papier evenwijdige lijnen zijn, dan is er sprake van een exponentieel verband, waarbij de groeifactoren en dus ook de groeipercentages gelijk zijn. [2p]
Conclusie: de lezer heeft ongelijk, de groeipercentages zijn gelijk. [1p]

tweede manier, m.b.v. het berekenen van de groeifactor per jaar:
Twee punten bij de achterblijvers zijn bijvoorbeeld:
2014 maand 12 geeft 200 Mbit en 2019 maand 12 geeft 1000 Mbit. [1p]
De groeifactor per 5 jaar is $\frac{1000}{200} = 5$ dus de groeifactor per jaar is $5^{\frac{1}{5}} = 1{,}379...$ [1p]
Twee punten bij de vernieuwers zijn bijvoorbeeld:
2014 maand 12 geeft 7000 Mbit en 2015 maand 12 geeft ongeveer 9700 Mbit. [1p]
De groeifactor per jaar is $\frac{9700}{7000} = 1{,}38...$ [1p]
Conclusie: de lezer heeft ongelijk, de groeifactoren, dus de groeipercentages, zijn (bij benadering) gelijk. [1p]

derde manier, m.b.v. groeifactor per gelijke tijdseenheid (in dit voorbeeld 5 jaar):
Twee punten bij de achterblijvers zijn bijvoorbeeld:
2014 maand 12 geeft 200 Mbit en 2019 maand 12 geeft 1000 Mbit. [1p]
De groeifactor per 5 jaar is $\frac{1000}{200} = 5$. [1p]
Twee punten bij de vernieuwers zijn bijvoorbeeld:
2014 maand 12 geeft 7000 Mbit en 2019 maand 12 geeft 35 000 Mbit. [1p]
De groeifactor per 5 jaar is $\frac{35\,000}{7000} = 5$. [1p]
Conclusie: de lezer heeft ongelijk, de groeifactoren, dus de groeipercentages, zijn gelijk. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Nierfunctie

3p **14** *Bereken, dus de grafische rekenmachine mag gebruikt worden.*

Thomas: $L = 45$, $G = 78$ en $K = 95$ invullen in $GFR = \dfrac{(140 - L) \cdot G}{0{,}81 \cdot K}$ geeft

$GFR = \dfrac{(140 - 45) \cdot 78}{0{,}81 \cdot 95} = 96{,}296\ldots$ [1p]

Julia: $L = 45$, $G = 69$ en $K = 95$ invullen in $GFR = 0{,}85 \cdot \dfrac{(140 - L) \cdot G}{0{,}81 \cdot K}$ geeft

$GFR = 0{,}85 \cdot \dfrac{(140 - 45) \cdot 69}{0{,}81 \cdot 95} = 72{,}407\ldots$ [1p]

$96{,}296\ldots - 72{,}407\ldots = 23{,}888\ldots$
Conclusie: het verschil tussen de *GFR* van Thomas en die van Julia is 24 milliliter per minuut. [1p]

3p **15** *Beredeneer met de formule, dus een getallenvoorbeeld levert geen punten op! Hoe kleiner de hoeveelheid kreatinine (K), des te beter de nierfunctie.*
L is leeftijd, dus *L* neemt elk jaar met 1 toe. Het gewicht *G* blijft hetzelfde en de waarde van *GFR* wordt elk jaar groter.

Voor vrouwen geldt: $GFR = 0{,}85 \cdot \dfrac{(140 - L) \cdot G}{0{,}81 \cdot K} = \dfrac{0{,}85 \cdot (140 - L) \cdot G}{0{,}81 \cdot K}$.

L neemt elk jaar met 1 toe, dus $140 - L$ neemt elk jaar met 1 af.
0,85 is een constante, *G* blijft hetzelfde en $140 - L$ neemt af, dus $0{,}85 \cdot (140 - L) \cdot G$ neemt af. [1p]
Als $0{,}81 \cdot K$ hetzelfde zou blijven, dan zou *GFR* afnemen.
GFR wordt elk jaar groter, dus *K* moet elk jaar kleiner worden (deel je door een kleiner getal, dan is de uitkomst van de breuk groter). [1p]
Conclusie: *K* wordt kleiner, dus de nierfunctie wordt beter. [1p]

3p **16** *Man van 40 jaar met een gewicht van 80 kg.*

$L = 40$ en $G = 80$ invullen in $GFR = \dfrac{(140 - L) \cdot G}{0{,}81 \cdot K}$ geeft

$GFR = \dfrac{(140 - 40) \cdot 80}{0{,}81 \cdot K}$ [1p] $= \dfrac{8000}{0{,}81 \cdot K} = \dfrac{8000}{0{,}81} \cdot \dfrac{1}{K}$ [1p] $= 9876{,}54\ldots \cdot K^{-1}$

Conclusie: $GFR = 9877 \cdot K^{-1}$ [1p]

4p **17** *Man van 33 jaar met een gewicht dat past bij zijn lengte, hoeveelheid kreatinine is 95 micromol per liter.*

Formule 1: $L = 33$ en $K = 95$ invullen in $GFR = \dfrac{(140 - L) \cdot G}{0{,}81 \cdot K}$ geeft

$GFR = \dfrac{(140 - 33) \cdot G}{0{,}81 \cdot 95} = \dfrac{107 \cdot G}{76{,}95} = \dfrac{107}{76{,}95} \cdot G = 1{,}39\ldots \cdot G$.

Formule 2: $L = 33$ en $K = 95$ invullen in $GFR = 32\,788 \cdot K^{-1{,}154} \cdot L^{-0{,}203}$ geeft

$GFR = 32\,788 \cdot 95^{-1{,}154} \cdot 33^{-0{,}203} = 84{,}171\ldots$ [1p]

GFR is hetzelfde voor beide formules, dus de vergelijking $1{,}39\ldots \cdot G = 84{,}171\ldots$ moet opgelost worden. [1p]

$G = \dfrac{84{,}17\ldots}{1{,}39\ldots} = 60{,}53\ldots$ [1p]

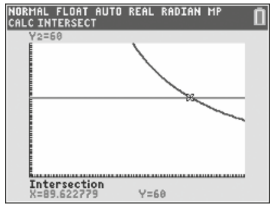
Conclusie: zijn gewicht in gehele kg is 61 kg. [1p]
Opmerking: om de vergelijking op te lossen mag ook gebruik worden gemaakt van de grafische rekenmachine.

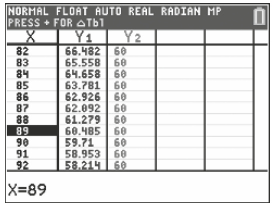
© ThiemeMeulenhoff

4p **18** *Vrouw van 56 jaar met een normale nierfunctie, dus een GFR van minimaal 60.*
Formule 2: $L = 56$ invullen in $GFR = 24\,329 \cdot K^{-1{,}154} \cdot L^{-0{,}203}$ geeft

$GFR = 24\,329 \cdot K^{-1{,}154} \cdot 56^{-0{,}203} = 10\,745{,}88\ldots \cdot K^{-1{,}154}$ [1p]

GFR is minimaal 60. De vergelijking $10\,745{,}88\ldots \cdot K^{-1{,}154} = 60$ oplossen met de grafische rekenmachine. [1p]
Voer in $y_1 = 10\,745{,}88\ldots \cdot x^{-1{,}154}$ en $y_2 = 60$.





Intersect geeft $x = K = 89{,}62\ldots$ (of zie de tabel: $K = 89$ geeft $GFR = 60{,}485$ en $K = 90$ geeft $GFR = 59{,}71$). [1p]
Conclusie: *K* is maximaal 89 micromol per liter voor een uitkomst van $GFR \geq 60$. [1p]
Opmerking: let op dat je hier naar beneden afrondt.

Elektrisch rijden

6p **19** *Ga ervan uit dat na 2016 de groei op dezelfde wijze voortzet. Bereken eerst de hoeveelheden in 2020 per type.*
Het aantal auto's op benzine of diesel nam jaarlijks met hetzelfde aantal toe.
In 4 jaar tijd, van 2012 tot en met 2016, groeide dit aantal met $7725 - 7482 = 243$.
Dus in 2020 zijn er $7725 + 243 = 7968$ ($\times 1000$) auto's op benzine of diesel. [1p]
Het aantal auto's op lpg nam jaarlijks met hetzelfde aantal af.
In 4 jaar tijd, van 2012 tot en met 2016, is de afname $203 - 165 = 38$.
Dus in 2020 zijn er $165 - 38 = 127$ ($\times 1000$) lpg-auto's. [1p]
Het aantal elektrische en hybride auto's nam jaarlijks met hetzelfde percentage toe.

In 4 jaar tijd, van 2012 tot en met 2016, was de groeifactor $\dfrac{211}{70}$. [1p]

Dus in 2020 zijn er $211 \cdot \dfrac{211}{70} = 211 \cdot 3{,}014\ldots = 636{,}014\ldots$ ($\times 1000$) elektrische en hybride auto's. [1p]

Tabel aantal personenauto's ($\times$1000) (uitgebreid met 2020)

type	**2012**	**2016**	**2020**
benzine of diesel	7482	7725	7968
lpg (gas)	203	165	127
elektrisch en hybride gezamenlijk	70	211	636,...
totaal	**7755**	**8101**	**8731,...**

Het gezamenlijk aandeel elektrische en hybride auto's in 2020 is

$\dfrac{636{,}\ldots}{8731{,}\ldots} \cdot 100\,\% = 7{,}284\ldots\,\%$ [1p]

Conclusie: het gezamenlijk aandeel elektrische en hybride auto's zal in 2020 **ten minste** 5,2% zijn. [1p]

© ThiemeMeulenhoff

Oefenen met het examen van 2021-I.
De antwoorden en uitwerkingen vind je op mijn.examenbundel.nl.

Deel 2b

Examen zonder uitwerkingen

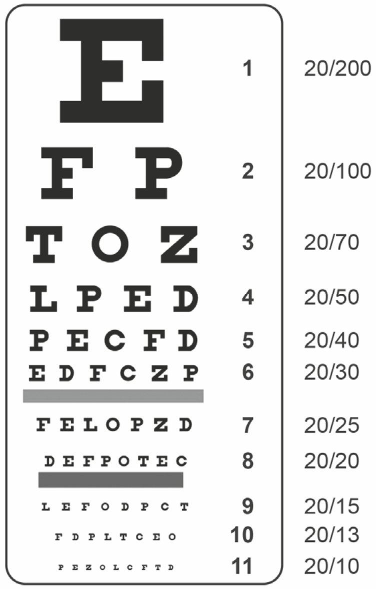
Bronvermelding
Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift op mijn.examenbundel.nl.

Examen 2021-I

Visus

Om te bepalen hoe goed iemands ogen functioneren, wordt vaak gebruikgemaakt van de Snellenkaart. De letters op deze kaart moeten vanaf een afstand van 20 feet (ongeveer 6 meter) worden gelezen.
Zie de figuur.

figuur



De **visus** is een maat voor de gezichtsscherpte. Deze maat kan met behulp van de Snellenkaart worden uitgedrukt in een score S. Iemand met normaal functionerende ogen kan de letters op regel 8 nog wel lezen, maar de letters op regel 9 niet meer. Bij normaal functionerende ogen hoort een score $S = \frac{20}{20} = 1$. Als een persoon nog kleinere letters kan lezen, dan is de score S groter dan 1. Bij de onderste regel 11 hoort bijvoorbeeld de score $S = \frac{20}{10} = 2$.

Iemand met $S = 0{,}5$ moet alles van tweemaal zo dichtbij bekijken om hetzelfde op de Snellenkaart te kunnen zien als iemand met $S = 1$.
Iemand met $S = 0{,}1$ moet tienmaal zo dichtbij staan, enzovoort.

Klaas en Lidy laten hun visus meten. Klaas kan regel 2 nog wel lezen, maar regel 3 niet meer. Lidy kan regel 7 nog wel lezen, maar regel 8 niet meer.

3p **1** Bereken hoeveel keer zo dicht Klaas bij de Snellenkaart moet staan als Lidy om hetzelfde te kunnen lezen als Lidy.

Er zijn meerdere maten voor de gezichtsscherpte. Voorbeelden hiervan zijn de logMAR-schaal[1)] en de ETDRS-letterscore[2)].

Het verband tussen de score S volgens de Snellenkaart en de score M op de logMAR-schaal wordt gegeven door formule 1. Voor het verband tussen de score S en de ETDRS-letterscore E geldt formule 2:

$S = 10^{-M}$ (formule 1)

$S = 10^{\frac{E-85}{50}}$ (formule 2)

De Wereldgezondheidsorganisatie noemt mensen met een score S tussen 0,05 en 0,3 slechtziend.

3p **2** Welke scores van M op de logMAR-schaal komen overeen met de scores $S = 0{,}05$ en $S = 0{,}3$? Geef je antwoorden in één decimaal.

Het Centraal Bureau Rijvaardigheidsbewijzen (CBR) stelt als keuringseis dat S minimaal 0,5 moet zijn. Janne heeft een ETDRS-letterscore van 75.

3p **3** Wordt Janne goedgekeurd door het CBR? Licht je antwoord toe met een berekening.

Aan de hand van formule 1 en formule 2 kan beredeneerd worden dat als M groter wordt, E kleiner zal worden.

3p **4** Geef deze redenering, zonder gebruik te maken van getallenvoorbeelden.

Door de twee formules te combineren, kan het volgende verband tussen M en E worden afgeleid:

$$-M = \frac{E-85}{50}$$

3p **5** Leid hieruit een formule af waarbij E wordt uitgedrukt in M.

noot 1 logMAR = Logarithm of the Minimum Angle of Resolution
noot 2 ETDRS = Early Treatment Diabetic Retinopathy Study

Klarinet

Een klarinet is een houten blaasinstrument. Alle mogelijke tonen die op het instrument kunnen worden gespeeld, worden samen het bereik genoemd. Het bereik van een klarinet is bijna vier octaven. Een octaaf bestaat uit 12 opeenvolgende toonafstanden. Zie de tabel.
Elke voorafgaande of opeenvolgende octaaf heeft dezelfde namen voor de tonen in dat octaaf.

De frequentie van een toon wordt gegeven in hertz (Hz), dit is het aantal trillingen per seconde. Bij een hogere toon hoort een hogere frequentie. Als je eenzelfde toon één octaaf hoger speelt, wordt de frequentie twee keer zo groot. Er bestaat een exponentieel verband tussen de frequenties en de tonen in de tabel: van elke volgende toon neemt de frequentie met een vast percentage toe. In de tabel zie je van enkele tonen de frequenties.

tabel Voorbeeld van een octaaf

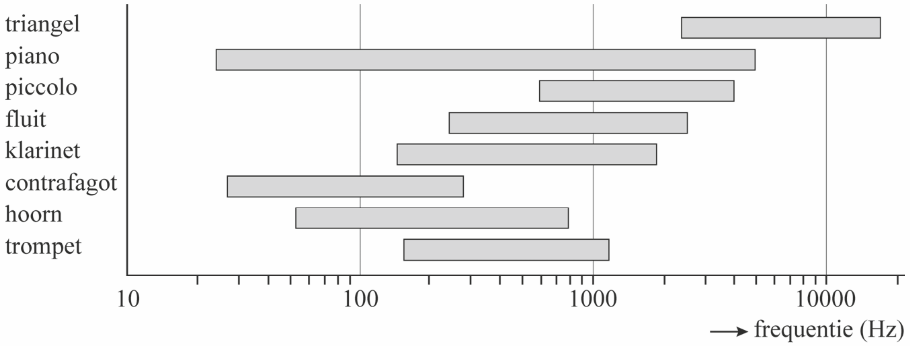
toon	A	Bes	B	C	Des	D	Es	E	F	Ges	G	As	A
frequentie (Hz)	440					587							880

In de tabel is de frequentie van de D-toon afgerond op hele Hz.

4p **6** Bereken op basis van de frequenties van de A-tonen uit de tabel de frequentie van de D-toon. Geef je antwoord in één decimaal.

In de figuur wordt op een logaritmische schaalverdeling het bereik van verschillende instrumenten aangegeven.

figuur



De laagste toon die een klarinet kan laten horen is een D. De hoogste toon is een A.

3p **7** Bereken aan de hand van bovenstaande gegevens, de tabel en de figuur de laagste en de hoogste frequentie die een klarinet kan bereiken. Geef je antwoorden in een geheel aantal Hz.

Een klarinettist moet altijd eerst een korte tijd inspelen om de klarinet op een vaste temperatuur van 31 °C te brengen. Als de klarinet koud is, klinken de tonen namelijk lager dan als de klarinet warm is. Dit komt omdat de snelheid van het geluid afhankelijk is van de temperatuur. Dit verband wordt gegeven door de formule:

$$v = 20\sqrt{273+T}$$

Hierin is v de snelheid van het geluid (in m/s) en T de temperatuur (in °C).

Met de formule kun je bijvoorbeeld berekenen dat bij een temperatuur van 20 °C de snelheid van het geluid ongeveer 342 m/s is. Bij een temperatuur van 31 °C is deze snelheid ongeveer 349 m/s.

4p **8** Bereken hoeveel graden de temperatuur moet toenemen om de snelheid van het geluid te laten stijgen van 339 m/s naar 349 m/s. Geef je antwoord in een geheel aantal graden.

Een toon van de klarinet is te horen als er lucht in de klarinetbuis in trilling gebracht wordt. Door tijdens het spelen gaatjes in de klarinetbuis open of dicht te doen, verandert de lengte L van het gedeelte van de klarinetbuis waarin de lucht trilt. De frequentie van een toon die op een klarinet gespeeld wordt, kun je berekenen met de formule:

$$f = \frac{v}{4L}$$

Hierin is f de frequentie van de toon (in Hz), v de snelheid van het geluid in de klarinet (in m/s) en L de lengte van het gedeelte van de klarinetbuis waarin de lucht trilt (in m).

Els speelt op haar klarinet met de eerder genoemde temperatuur van 31 °C een toon die klinkt met een frequentie van precies 440 Hz. Deze toon had bij het begin van het inspelen op de klarinet met een temperatuur van 20 °C een andere frequentie dan nu de klarinet een temperatuur van 31 °C heeft.

3p **9** Bereken deze frequentie. Geef je antwoord in een geheel aantal Hz.

De voorsteekpas[1)]

In de zomermaanden worden pretparken druk bezocht. De wachttijden voor de attracties kunnen dan sterk oplopen. De wachttijd voor een attractie kan berekend worden met de formule:

$$W = \frac{r \cdot S}{2(1-r)}$$

Hierin is W de gemiddelde wachttijd van een willekeurige bezoeker in minuten en r de bezettingsgraad van de attractie ($0 < r < 1$).
Als voor de bezettingsgraad bijvoorbeeld geldt dat $r = 0{,}85$, betekent dit dat gemiddeld 85% van de plaatsen in de attractie bezet is.
S is de bedieningstijd per bezoeker in seconden.
Als bijvoorbeeld een attractie elke 10 minuten 100 bezoekers kan bedienen, geldt:
$S = 6 \; (= \frac{600 \text{ seconden}}{100 \text{ bezoekers}})$.

In Walibi Belgium is de achtbaan Vampire een populaire attractie, die in de zomermaanden een bezettingsgraad van 98% heeft. De Vampire kan iedere vier minuten 80 bezoekers bedienen.

3p **10** Bereken hoeveel minuten de gemiddelde wachttijd van een bezoeker voor de Vampire in de zomermaanden is.

In de zomer van 2013 introduceerde Walibi Belgium een zogenoemde voorsteekpas. Met deze pas kan een bezoeker voorrang krijgen bij de attracties. Daardoor zal de wachttijd voor een bezoeker zonder deze pas langer worden.

Er zijn nu twee formules voor de wachttijd voor een attractie, namelijk een formule voor de gemiddelde wachttijd W_p in minuten van een bezoeker met de voorsteekpas en een formule voor de gemiddelde wachttijd W_z in minuten van een bezoeker zonder voorsteekpas:

$$W_p = \frac{r \cdot S}{2(1-a \cdot r)} \quad \text{en} \quad W_z = \frac{r \cdot S}{2(1-r)(1-a \cdot r)}$$

Hierin is a het gedeelte van de bezoekers met een voorsteekpas ($0 < a < 1$).

noot 1 ‘Voorsteken’ is een Vlaams woord voor ‘inhalen, voordringen’.

Een andere bekende attractie van Walibi Belgium is de Cobra. Deze attractie heeft een bezettingsgraad van 95% (dus $r = 0{,}95$) en een bedieningstijd van 6 seconden per bezoeker (dus $S = 6$).

Op 6 juli 2013 kocht 10% van de bezoekers een voorsteekpas, dus $a = 0{,}10$.

4p **11** Bereken voor deze dag het verschil in wachttijd bij de Cobra tussen bezoekers zonder voorsteekpas en bezoekers met voorsteekpas. Geef je antwoord in gehele minuten.

De wachttijd van de bezoekers zonder voorsteekpas wordt groter als meer bezoekers een voorsteekpas kopen.
De directie van Walibi Belgium wil dat de wachttijd van bezoekers zonder voorsteekpas bij de Cobra maximaal 80 minuten is.

4p **12** Bereken hoeveel procent van de bezoekers dan maximaal een voorsteekpas mag hebben. Geef je antwoord in één decimaal.

Voor de Cobra kan de formule van de wachttijd voor bezoekers zonder voorsteekpas worden herleid tot:

$$W_z = \frac{5{,}7}{0{,}10 - \ldots \cdot a}$$

3p **13** Geef deze herleiding. Rond het getal dat op de puntjes moet staan niet af.

Nibud Scholierenonderzoek

Het Nibud Scholierenonderzoek brengt het financiële gedrag van scholieren in het voortgezet onderwijs in kaart.
De populatie van dit onderzoek bestaat uit alle vmbo-, havo- en vwo-scholieren in de leeftijd van 12 tot en met 18 jaar. Van een aselecte steekproef van 3260 scholieren uit de populatie zijn gegevens beschikbaar gekomen via online vragenlijsten. We gaan ervan uit dat deze steekproef representatief is.

1530 scholieren in de steekproef hebben een bijbaantje.

3p **14** Bereken het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie scholieren met een bijbaantje. Geef de getallen in je antwoord in twee decimalen.

In het rapport staat een tabel met informatie over het gemiddeld aantal uren per week dat een scholier met een bijbaantje werkt (zie tabel 1).

tabel 1 Bijbaan: gemiddeld aantal uren per week

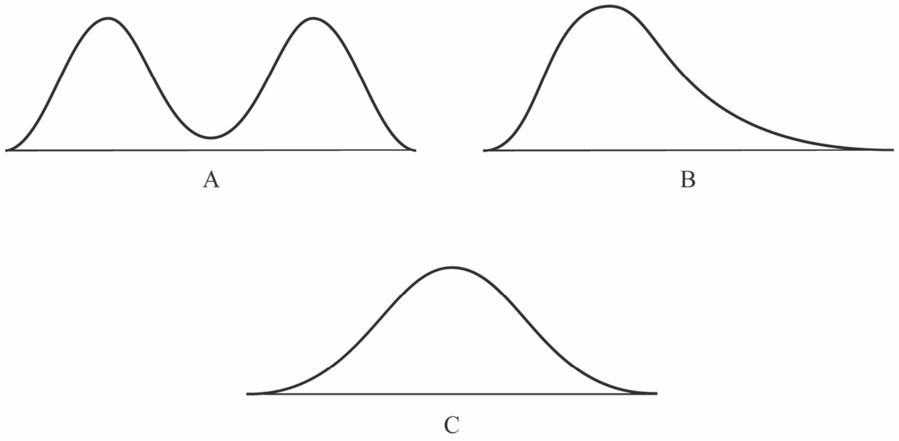
onderwijsniveau en klas	bijbaan (uren per week)
vmbo bovenbouw (klas 3 en 4)	9
havo / vwo (klas 3)	6
havo bovenbouw (klas 4 en 5)	8
vwo bovenbouw (klas 4, 5 en 6)	6

Als je met behulp van het formuleblad een uitspraak wilt doen over het verschil tussen havo bovenbouwscholieren met een bijbaantje en vwo bovenbouwscholieren met een bijbaantje in het aantal uren dat zij werken, dan heb je meer informatie of misschien wel heel andere informatie nodig dan die in tabel 1 staat.

4p **15** Beschrijf twee manieren om met behulp van het formuleblad een uitspraak te doen over dit verschil tussen deze twee groepen, en geef voor beide manieren aan welke informatie je dan (extra) nodig hebt.

In de steekproef bedroeg het gemiddelde inkomen van een scholier met een bijbaantje 112 euro per maand. De mediaan was 65 euro. In de figuur zie je drie frequentieverdelingen afgebeeld waarvan er één de frequentieverdeling van het inkomen per maand van een scholier met een bijbaantje in de steekproef weergeeft.

figuur



2p **16** Welke van de drie frequentieverdelingen is dat? Licht je antwoord toe.

Het Nibud wil het inkomen van scholieren met een bijbaantje ook per onderwijsniveau in kaart brengen. Dat hebben ze gedaan door tabel 2 in hun onderzoeksrapport te zetten.

tabel 2 Bijbaan: inkomen (in euro) per maand van 15- en 16-jarigen

onderwijsniveau en klas	gemiddelde	mediaan
vmbo bovenbouw (klas 3 en 4)	149	107
havo / vwo (klas 3)	93	65
havo bovenbouw (klas 4 en 5)	181	142
vwo bovenbouw (klas 4, 5 en 6)	130	101

Deze tabel is gebaseerd op scholieren in de steekproef die 15 of 16 jaar zijn.

2p **17** Leg uit waarom men niet heeft gekozen voor scholieren in de steekproef die 17 of 18 jaar zijn.

Voor het laatste onderdeel van deze opgave kijken we niet naar het inkomen van scholieren, maar naar een aspect van de uitgaven van scholieren. Dit aspect betreft de vraag hoe vaak scholieren spijt hebben na het doen van een aankoop. Van 1200 aselect gekozen respondenten (600 jongens en 600 meisjes) is bekend hoe vaak zij spijt hebben na het doen van een aankoop. De resultaten zijn weergegeven in een relatieve frequentietabel, zie tabel 3.

tabel 3 Spijt na het doen van een aankoop

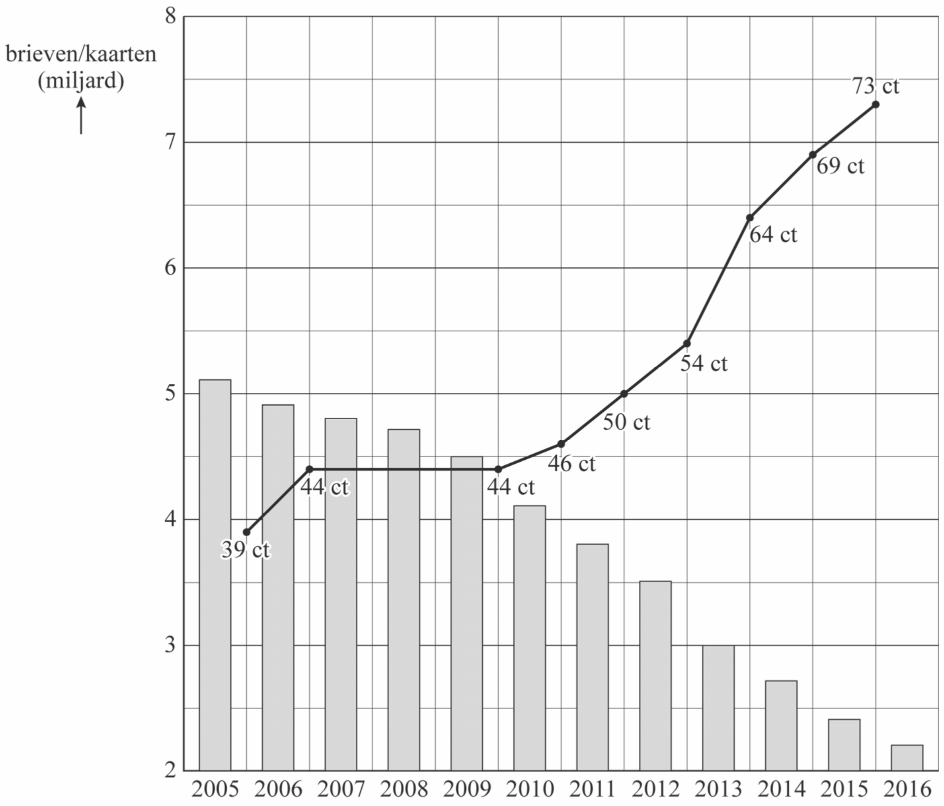
	jongens	meisjes	totaal
nooit / zelden	16%	8%	12%
meestal niet	65%	61%	63%
meestal wel	19%	29%	24%
vaak / altijd	0%	2%	1%

5p **18** Onderzoek met behulp van het formuleblad of het verschil tussen jongens en meisjes in hoe vaak zij spijt hebben na het doen van een aankoop gering, middelmatig of groot is.

Postzegels

Mensen sturen steeds minder brieven en kaarten. Postzegels zijn in Nederland de afgelopen jaren flink duurder geworden. Elk jaar op 1 januari wordt de prijs zo nodig aangepast.
In de figuur zie je de postzegelprijs (in centen) en het aantal brieven/kaarten (in miljarden) dat bezorgd werd in de jaren 2005-2016.

figuur



Je kunt in de figuur bijvoorbeeld aflezen dat op 1 januari 2007 de postzegelprijs 44 cent was en dat er in het jaar 2007 4,8 miljard brieven/kaarten werden bezorgd.

Op 1 januari 2010 kostte een postzegel 44 cent. Op 1 januari 2014 was de prijs gestegen tot 64 cent. Veronderstel dat in de periode 2010-2014 de postzegelprijs exponentieel groeide.

4p **19** Bereken met de bovengenoemde gegevens uit 2010 en 2014 het jaarlijkse groeipercentage van de postzegelprijs. Geef je antwoord in één decimaal.

In de periode 2010-2016 nam het aantal brieven/kaarten dat jaarlijks werd bezorgd bij benadering lineair af. Er werd in 2016 voorspeld dat deze afname zich nog een aantal jaren op deze manier zou voortzetten.

4p **20** Bereken met de aantallen uit 2010 en 2016 hoeveel miljard brieven/kaarten er in 2020 volgens deze voorspelling bezorgd zouden worden. Geef je antwoord in één decimaal.

In de tabel zie je voor 2015 en 2016 onder andere het aantal bezorgde brieven/kaarten en de bijbehorende opbrengst. Dit is het totale bedrag dat aan postzegels is verkocht dat op al die brieven/kaarten is geplakt. De opbrengst in 2016 was lager dan die in 2015, ondanks de verhoging van de postzegelprijs van € 0,69 naar € 0,73.

tabel

	brieven/kaarten		
jaar	**aantal stuks (in miljoenen)**	**opbrengst (in miljoenen euro's)**	**postzegelprijs (cent)**
2015	2401	1961	69
2016	2213	1877	73

Voor het versturen van brieven/kaarten tot 20 gram heb je 1 postzegel nodig. Voor het versturen van brieven/kaarten vanaf 20 gram tot 50 gram moet je 2 postzegels plakken, en vanaf 50 tot 100 gram 3 postzegels. Neem aan dat op alle brieven/kaarten maximaal 3 postzegels zijn geplakt.

2p **21** Leg met behulp van de tabel uit dat op een deel van de brieven/kaarten in 2015 meer dan 1 postzegel moet zijn geplakt.

Neem aan dat in 2016 op 88% van de brieven/kaarten 1 postzegel werd geplakt en op de overige brieven/kaarten 2 of 3 postzegels.
Je kunt dan met behulp van de tabel de volgende vergelijking opstellen om het aantal brieven/kaarten met 2 postzegels te berekenen:

$$0,73 \cdot 1947,44 + 1,46 \cdot x + 2,19 \cdot (265,56 - x) = 1877$$

Hierin is x het aantal brieven/kaarten met 2 postzegels in miljoenen.

3p **22** Leg met berekeningen uit hoe je aan de getallen $1947,44$ en $1,46$ en $2,19$ en $265,56$ in deze vergelijking kunt komen.

3p **23** Bereken het percentage brieven/kaarten met 2 postzegels in 2016. Geef je antwoord in hele procenten.

Fijnstofemissie

In het rapport Transport en Mobiliteit 2016 van het Centraal Bureau voor de Statistiek staat informatie over de fijnstofemissie (dit is de hoeveelheid fijnstof die vrijkomt) door het vervoer over de weg, uitgesplitst naar personenvervoer en goederenvervoer. Deze hoeveelheid wordt bepaald door het aantal gereden kilometers te vermenigvuldigen met de fijnstofemissie per gereden kilometer.

In 1990 was het aantal gereden kilometers door het personenvervoer 103 200 miljoen en door het goederenvervoer 16 800 miljoen. In 2014 is het aantal gereden kilometers voor het personenvervoer twee keer zo groot geworden als in 1990 en het aantal gereden kilometers voor het goederenvervoer drie keer zo groot. Ondanks de toename van het aantal gereden kilometers is de totale fijnstofemissie door het wegvervoer in 2014 aanzienlijk minder dan in 1990. Dit komt vooral door het gebruik van betere motoren.

Er moet worden onderzocht met hoeveel procent de totale emissie van fijnstof door het wegvervoer in de periode 1990 tot en met 2014 is gedaald. Daarvoor moeten bovenstaande gegevens over het aantal gereden kilometers en onderstaande aannames over de fijnstofemissie per gereden kilometer worden gebruikt.

In 1990 kwam er gemiddeld genomen bij het personenvervoer per gereden kilometer 0,08 gram fijnstof vrij. Voor het goederenvervoer was dit toen 0,58 gram. In de periode 1990 tot en met 2014 daalde de fijnstofemissie bij het personenvervoer elk jaar met 0,003 gram per gereden kilometer. In dezelfde periode daalde de fijnstofemissie per gereden kilometer bij het goederenvervoer met 9% per jaar.

6p **24** Onderzoek met behulp van bovenstaande gegevens en aannames met welk percentage de totale emissie van fijnstof door het wegvervoer in 2014 is gedaald ten opzichte van 1990. Geef je antwoord in hele procenten.

Bijlagen

Cijferbepaling

De examens zijn aangepaste examens. Onderstaande cijferbepalingen geven een indicatie van het cijfer.

2017-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	47	**6,8**
1	**1,2**	48	**6,9**
2	**1,5**	49	**7,0**
3	**1,7**	50	**7,1**
4	**1,9**	51	**7,2**
5	**2,1**	52	**7,4**
6	**2,2**	53	**7,5**
7	**2,3**	54	**7,6**
8	**2,4**	55	**7,7**
9	**2,5**	56	**7,8**
10	**2,6**	57	**7,9**
11	**2,7**	58	**8,0**
12	**2,9**	59	**8,1**
13	**3,0**	60	**8,3**
14	**3,1**	61	**8,4**
15	**3,2**	62	**8,5**
16	**3,3**	63	**8,6**
17	**3,4**	64	**8,7**
18	**3,5**	65	**8,8**
19	**3,6**	66	**8,9**
20	**3,8**	67	**9,0**
21	**3,9**	68	**9,2**
22	**4,0**	69	**9,3**
23	**4,1**	70	**9,4**
24	**4,2**	71	**9,5**
25	**4,3**	72	**9,6**
26	**4,4**	73	**9,6**
27	**4,5**	74	**9,7**
28	**4,7**	75	**9,7**
29	**4,8**	76	**9,8**
30	**4,9**	77	**9,8**
31	**5,0**	78	**9,9**
32	**5,1**	79	**9,9**
33	**5,2**	80	**10,0**
34	**5,3**		
35	**5,4**		
36	**5,6**		
37	**5,7**		
38	**5,8**		
39	**5,9**		
40	**6,0**		
41	**6,1**		
42	**6,2**		
43	**6,3**		
44	**6,5**		
45	**6,6**		
46	**6,7**		

2017-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	47	**6,7**
1	**1,2**	48	**6,8**
2	**1,4**	49	**6,9**
3	**1,7**	50	**7,0**
4	**1,9**	51	**7,1**
5	**2,0**	52	**7,2**
6	**2,2**	53	**7,3**
7	**2,3**	54	**7,4**
8	**2,4**	55	**7,5**
9	**2,5**	56	**7,6**
10	**2,6**	57	**7,8**
11	**2,7**	58	**7,9**
12	**2,8**	59	**8,0**
13	**2,9**	60	**8,1**
14	**3,0**	61	**8,2**
15	**3,1**	62	**8,3**
16	**3,3**	63	**8,4**
17	**3,4**	64	**8,5**
18	**3,5**	65	**8,6**
19	**3,6**	66	**8,7**
20	**3,7**	67	**8,9**
21	**3,8**	68	**9,0**
22	**3,9**	69	**9,1**
23	**4,0**	70	**9,2**
24	**4,1**	71	**9,3**
25	**4,2**	72	**9,4**
26	**4,4**	73	**9,5**
27	**4,5**	74	**9,6**
28	**4,6**	75	**9,6**
29	**4,7**	76	**9,7**
30	**4,8**	77	**9,7**
31	**4,9**	78	**9,8**
32	**5,0**	79	**9,8**
33	**5,1**	80	**9,9**
34	**5,2**	81	**9,9**
35	**5,3**	82	**10,0**
36	**5,5**		
37	**5,6**		
38	**5,7**		
39	**5,8**		
40	**5,9**		
41	**6,0**		
42	**6,1**		
43	**6,2**		
44	**6,3**		
45	**6,4**		
46	**6,5**		

2018-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	47	**6,8**
1	**1,2**	48	**6,9**
2	**1,4**	49	**7,0**
3	**1,6**	50	**7,1**
4	**1,7**	51	**7,2**
5	**1,8**	52	**7,4**
6	**1,9**	53	**7,5**
7	**2,0**	54	**7,6**
8	**2,1**	55	**7,7**
9	**2,3**	56	**7,8**
10	**2,4**	57	**8,0**
11	**2,5**	58	**8,1**
12	**2,6**	59	**8,2**
13	**2,7**	60	**8,3**
14	**2,9**	61	**8,4**
15	**3,0**	62	**8,5**
16	**3,1**	63	**8,7**
17	**3,2**	64	**8,8**
18	**3,3**	65	**8,9**
19	**3,5**	66	**9,0**
20	**3,6**	67	**9,1**
21	**3,7**	68	**9,3**
22	**3,8**	69	**9,4**
23	**3,9**	70	**9,5**
24	**4,0**	71	**9,6**
25	**4,2**	72	**9,7**
26	**4,3**	73	**9,8**
27	**4,4**	74	**9,9**
28	**4,5**	75	**9,9**
29	**4,6**	76	**10,0**
30	**4,8**		
31	**4,9**		
32	**5,0**		
33	**5,1**		
34	**5,2**		
35	**5,3**		
36	**5,5**		
37	**5,6**		
38	**5,7**		
39	**5,8**		
40	**5,9**		
41	**6,1**		
42	**6,2**		
43	**6,3**		
44	**6,4**		
45	**6,5**		
46	**6,6**		

Bedenk dat het toekennen van punten aan een antwoord enige deskundigheid vereist. De hier behaalde scores zijn dus vooral een indicatie van hoeveel je op dit moment weet over het vak.

© ThiemeMeulenhoff

2018-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	47	**6,6**
1	**1,2**	48	**6,7**
2	**1,4**	49	**6,9**
3	**1,5**	50	**7,0**
4	**1,7**	51	**7,1**
5	**1,8**	52	**7,2**
6	**1,9**	53	**7,3**
7	**2,0**	54	**7,4**
8	**2,1**	55	**7,5**
9	**2,2**	56	**7,7**
10	**2,4**	57	**7,8**
11	**2,5**	58	**7,9**
12	**2,6**	59	**8,0**
13	**2,7**	60	**8,1**
14	**2,8**	61	**8,2**
15	**2,9**	62	**8,4**
16	**3,0**	63	**8,5**
17	**3,2**	64	**8,6**
18	**3,3**	65	**8,7**
19	**3,4**	66	**8,8**
20	**3,5**	67	**8,9**
21	**3,6**	68	**9,0**
22	**3,7**	69	**9,2**
23	**3,9**	70	**9,3**
24	**4,0**	71	**9,4**
25	**4,1**	72	**9,5**
26	**4,2**	73	**9,6**
27	**4,3**	74	**9,7**
28	**4,4**	75	**9,8**
29	**4,5**	76	**9,9**
30	**4,7**	77	**9,9**
31	**4,8**	78	**10,0**
32	**4,9**		
33	**5,0**		
34	**5,1**		
35	**5,2**		
36	**5,4**		
37	**5,5**		
38	**5,6**		
39	**5,7**		
40	**5,8**		
41	**5,9**		
42	**6,0**		
43	**6,2**		
44	**6,3**		
45	**6,4**		
46	**6,5**		

2019-I

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	47	**6,4**
1	**1,1**	48	**6,5**
2	**1,2**	49	**6,7**
3	**1,3**	50	**6,8**
4	**1,5**	51	**6,9**
5	**1,6**	52	**7,0**
6	**1,7**	53	**7,1**
7	**1,8**	54	**7,2**
8	**1,9**	55	**7,3**
9	**2,0**	56	**7,5**
10	**2,2**	57	**7,6**
11	**2,3**	58	**7,7**
12	**2,4**	59	**7,8**
13	**2,5**	60	**7,9**
14	**2,6**	61	**8,0**
15	**2,7**	62	**8,2**
16	**2,8**	63	**8,3**
17	**3,0**	64	**8,4**
18	**3,1**	65	**8,5**
19	**3,2**	66	**8,6**
20	**3,3**	67	**8,7**
21	**3,4**	68	**8,8**
22	**3,5**	69	**9,0**
23	**3,7**	70	**9,1**
24	**3,8**	71	**9,2**
25	**3,9**	72	**9,3**
26	**4,0**	73	**9,4**
27	**4,1**	74	**9,5**
28	**4,2**	75	**9,7**
29	**4,3**	76	**9,8**
30	**4,5**	77	**9,9**
31	**4,6**	78	**10,0**
32	**4,7**		
33	**4,8**		
34	**4,9**		
35	**5,0**		
36	**5,2**		
37	**5,3**		
38	**5,4**		
39	**5,5**		
40	**5,6**		
41	**5,7**		
42	**5,8**		
43	**6,0**		
44	**6,1**		
45	**6,2**		
46	**6,3**		

2019-II

punten	cijfer	punten	cijfer
0	**1,0**	47	**7,2**
1	**1,3**	48	**7,4**
2	**1,5**	49	**7,5**
3	**1,6**	50	**7,6**
4	**1,7**	51	**7,8**
5	**1,8**	52	**7,9**
6	**2,0**	53	**8,0**
7	**2,1**	54	**8,1**
8	**2,2**	55	**8,3**
9	**2,4**	56	**8,4**
10	**2,5**	57	**8,5**
11	**2,6**	58	**8,7**
12	**2,7**	59	**8,8**
13	**2,9**	60	**8,9**
14	**3,0**	61	**9,0**
15	**3,1**	62	**9,2**
16	**3,3**	63	**9,3**
17	**3,4**	64	**9,4**
18	**3,5**	65	**9,6**
19	**3,6**	66	**9,7**
20	**3,8**	67	**9,8**
21	**3,9**	68	**9,9**
22	**4,0**	69	**9,9**
23	**4,2**	70	**10,0**
24	**4,3**		
25	**4,4**		
26	**4,5**		
27	**4,7**		
28	**4,8**		
29	**4,9**		
30	**5,1**		
31	**5,2**		
32	**5,3**		
33	**5,4**		
34	**5,6**		
35	**5,7**		
36	**5,8**		
37	**6,0**		
38	**6,1**		
39	**6,2**		
40	**6,3**		
41	**6,5**		
42	**6,6**		
43	**6,7**		
44	**6,9**		
45	**7,0**		
46	**7,1**		

© ThiemeMeulenhoff

Onderwerpregister

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
a		
aantal mogelijkheden	*zie telproblemen*	
algebraïsche vaardigheden		*zie rekenen*
b		
betrouwbaarheidsinterval	h7 **6 7**	2018-I **18** 2018-II **9**
boomdiagram	h8 **8**	
boxplot	h7 **1 - 7 9 - 11 12 13 26**	2017-I **7** 2017-II **13 14 16** 2018-II **17 18** 2019-II **9**
breuken	h1 **1a-h 2def**	
c		
combinaties	h8 **1 2 12 14 - 17 19 21 25**	
cumulatief frequentiepolygoon		
d		
differentiequotiënt	h3 **20 21**	
dotplot		2017-II **12**
e		
eerstegraads functie	*zie lineair verband*	
effectgrootte	*zie vuistregels voor het verschil van twee groepen*	
enkellogaritmisch papier	*zie logaritmisch papier*	
exponentieel verband	h5	2017-I **11 - 14 17 19** 2017-II **3 20** 2018-I **8** 2018-II **3** 2019-I **1 23** 2019-II **1 2 13 19**
exponentiële groei	*zie exponentieel verband*	
extrapoleren	*zie interpoleren*	
f		
faculteit	h8 **20**	
formule	h1 **6 - 13 22 - 25**	2017-I **18** 2019-I **1 - 3 13 - 18 21 22** 2019-II **14 - 18**
formule herschrijven/ herleiden	h1 **2ij** h5 **13** h6 **8 11 22 - 26**	2017-I **4** 2017-II **10 18** 2018-I **13 - 5** 2018-II **7** 2019-I **6 15** 2019-II **16**
formule maken	h1 **12 13** h6 **16 17**	2019-I **15** 2019-II **11**
formule rechte lijn maken	*zie lineair verband*	
formule interpreteren		2018-I **3 12** 2018-II **4 14** 2019-I **14 16** 2019-II **15**
formules met meerdere variabelen	h2 **31 - 36** h6	2017-I **2 - 4** 2017-II **8 9** 2018-I **1 - 5 11 - 15** 2018-II **4 - 8 13 - 16** 2019-II **14 - 18**
frequentie	h2 **1**	

onderwerp	deel 1 hoofdstuk **onderdeel**	deel 2a examen **onderdeel**
frequentiepolygoon	h7 **20 41**	2017-II **12** 2018-I **17** 2018-II **11**
frequentietabel	h7 **1 12 - 15**	
g		
gemiddelde	h2 **2 3 27** h6 **5 6** h7 **4 15 18**	2017-I **22** 2017-II **16**
grafieken	h2 **14 - 30 37 - 41** h3 **9 - 11** h4 **11 13 18** h9 **2 4**	2017-II **1 4 5 - 7 17** 2018-II **19 20** 2019-I **20** 2019-II **10**
groeifactor	h5 **10 20**	2017-I **11 - 13** 2017-II **20 21** 2018-II **3** 2019-II **1**
grote getallen	h1 **4 5** h3 **14 15** h6 **4 - 6**	
h		
haakjes	h1 **2a-g 10 11**	
halveringstijd	h5 **8 28 32 34**	2019-II **2**
histogram	h7 **6 - 8**	2018-II **19** 2019-I **8 9**
i		
interkwartielafstand	*zie kwartiel*	
interpoleren	*zie lineair interpoleren*	
k		
kruistabel	h9 **1**	
kwalitatief		
kwantitatief		
kwartiel	h7 **3 19 43**	2017-I **8 9**
l		
lijn	*zie lineair verband*	
lineair interpoleren	h7 **14 29**	2017-I **16** 2017-II **2** 2018-II **2** 2019-II **4 19**
lineair verband	h4 h5 **2 4 7 22**	2017-I **20 21** 2017-II **18 19 22** 2018-I **13 14** 2018-II **2 20** 2019-I **2 23** 2019-II **4 19**
lineaire groei	*zie lineair verband*	
logaritmisch papier	h5 **12 15 16**	2018-I **10** 2019-I **19** 2019-II **12 13**
m		
matrix		
mediaan	h7 **5**	2018-II **12** 2019-I **9**
modus		2019-I **9**
n		
nominaal		
normale verdeling	*zie vuistregels voor de normale verdeling*	

onderwerp	deel 1 hoofdstuk onderdeel	deel 2a examen onderdeel
o		
omgekeerd evenredig		2019-II 11
onderzoeksopgave	h6 28 h9	2017-I 22 2017-II 22
		2018-I 21 2018-II 22
		2019-I 23 2019-II 19
ongelijkheid	h4 2	
ordinaal		
p		
percentage	*zie procenten*	
phi	*zie vuistregels voor het verschil van twee groepen*	
populatie	h7 32	
procenten	h1 14 15 20 - 23	2017-I 10 13 2017-II 1
	h3 7 14	2018-I 16 2018-II 1 - 3 6
	h5 21 h6 7 h7 19	2019-I 1 10 23
		2019-II 1 - 3 19
	h9 1 4	
proportie	h7 33 34	2019-I 11
puntenwolk	h7 23 - 31 36 - 40	2019-I 12
r		
recht evenredig verband	h2 33	
rechte lijn	*zie lineair verband*	
rekenen	h1 1 - 23	2017-I 1 2 22 2017-II 11 22
	h2 19 - 21 h4 12 - 15	2018-II 21 22 2019-I 7
representatie	h7 1	
s		
snelheid	h2 12 13 h3 9 - 11	
	h9 3	
spreiding		2017-I 8 9 2019-II 5 6
spreidingsdiagram		2019-II 5 - 8
staafdiagram	h2 6	2017-I 5 22 2019-I 23
staart	h7 8	
standaardafwijking	h7 4 7 34	2017-I 8
statistiek	h7	
steekproef aselect	h7 23	2018-I 19
steekproef gegevens analyseren	h7	
steekproefgrootte	h7 35	
stijging	h3 4 - 8	2017-II 7
t		
tabel	h2 1 - 11	2017-I 15 22
		2017-II 4 8
		2018-I 2 5 2019-I 8 - 11 18
telproblemen	h8	
toename	h3 4 - 6	
toenamediagram	h3 1 - 3 12 13 15 - 18 22	
trendlijn		2019-II 3 4 7

© ThiemeMeulenhoff

onderwerp	deel 1 hoofdstuk onderdeel	deel 2a examen onderdeel
v		
variatiebreedte		2017-I
veranderingen	h3	
verdeling	h7 8 16 - 18	
verdubbelingstijd	h5 3 15 31	
vergelijking	h4 3 11	2017-I 12 14 2017-II 21
	h5 3 6 8 11 17 19 24	2018-I 2
	h6 4 21	2019-I 3 17 22
		2019-II 2 17 18
verhoudingen	h1 20 - 23	2019-I 4 5 7
vuistregels voor de normale verdeling	h7 30 39	2017-I 6
		2018-I 6 2019-I 8 2019-II 7
vuistregels voor het verschil van twee groepen (zie formuleblad)	h7 44	2017-I 7 2017-II 13 15
		2018-I 7 20 2018-II 10
		2019-II 9
w		
wortels	h1 1ghj	

© ThiemeMeulenhoff

Examenwerkwoorden

Als in een examen een van de woorden uit onderstaande lijst wordt gebruikt, geldt de betekenis die hieraan in deze lijst is gegeven.
Deze lijst met examen(werk)woorden is niet uitputtend.
Algemeen: Tenzij anders aangegeven, is de wijze waarop het antwoord gevonden wordt vrij.

aantonen dat, laten zien dat	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de juistheid van het gestelde blijkt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet
afleiden van bijvoorbeeld een formule of een eenheid	Het geven van een redenering en/of berekening waaruit de juistheid van de formule of eenheid volgt. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. Tenzij anders aangegeven, geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet.
bepalen	Het gevraagde vaststellen en/of uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
beredeneren, uitleggen	Het geven van een uitwerking waarin de denkstappen staan waaruit het gestelde/gevraagde blijkt.
berekenen	Het gevraagde uitrekenen. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
herleiden (van een formule)	Een formule stap voor stap herschrijven tot deze in de gevraagde vorm staat, zonder gebruik te maken van specifieke opties van de grafische rekenmachine.
noemen, (aan) geven wat, welke, wanneer, hoeveel	Een eindantwoord geven. Een toelichting is niet vereist, tenzij anders is aangegeven.
onderzoeken	Het geven van een redenering en/of bepaling en/of berekening waaruit de (on)juistheid van het gestelde blijkt. Het antwoord moet worden afgesloten met een conclusie. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet. In het algemeen geldt dat het gestelde controleren door middel van een of meer voorbeelden niet voldoet, tenzij het geven van een tegenvoorbeeld tot de juiste conclusie leidt.
oplossen	Het bepalen van de waarden van een of meer onbekenden die voldoen aan de gegeven vergelijking of ongelijkheid. Uit de uitwerking moet blijken welke stappen zijn gezet.
schetsen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat.
tekenen	Het geven van een grafische voorstelling die de voor de probleemsituatie relevante karakteristieke eigenschappen bevat en voldoende nauwkeurig is. In het geval van een grafiek moet een assenstelsel met schaalverdeling zijn weergegeven.

© ThiemeMeulenhoff

Formuleblad

Vuistregels voor de grootte van het verschil van twee groepen

2×2 kruistabel $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, met $phi = \dfrac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(a+c)(b+d)(c+d)}}$, waarin *a*, *b*, *c* en *d* absolute aantallen zijn.

- als $phi < -0,4$ of $phi > 0,4$, dan zeggen we "het verschil is groot",
- als $-0,4 \le phi < -0,2$ of $0,2 < phi \le 0,4$, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- als $-0,2 \le phi \le 0,2$, dan zeggen we "het verschil is gering".

Maximaal verschil in cumulatief percentage ($\max V_{cp}$) (met voor beide groepen een steekproefomvang $n > 100$)

- als $\max V_{cp} > 40$, dan zeggen we "het verschil is groot",
- als $20 < \max V_{cp} \le 40$, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- als $\max V_{cp} \le 20$, dan zeggen we "het verschil is gering".

Effectgrootte $E = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\frac{1}{2}(S_1 + S_2)}$, met $\overline{X}_1$ en $\overline{X}_2$ de steekproefgemiddelden ($\overline{X}_1 \ge \overline{X}_2$), S_1 en S_2 de steekproefstandaardafwijkingen

- als $E > 0,8$, dan zeggen we "het verschil is groot",
- als $0,4 < E \le 0,8$, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- als $E \le 0,4$, dan zeggen we "het verschil is gering".

Twee boxplots vergelijken

- als de boxen[1)] elkaar niet overlappen, dan zeggen we "het verschil is groot",
- als de boxen elkaar wel overlappen en een mediaan van een boxplot buiten de box van de andere boxplot ligt, dan zeggen we "het verschil is middelmatig",
- in alle andere gevallen zeggen we "het verschil is gering".

noot 1 De 'box is het interval vanaf het eerste kwartiel tot en met het derde kwartiel.

© ThiemeMeulenhoff

Betrouwbaarheidsintervallen

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie is
$p \pm 2 \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$, met p de steekproefproportie en n de steekproefomvang.

Het 95%-betrouwbaarheidsinterval voor het populatiegemiddelde is
$\overline{X} \pm 2 \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$, met $\overline{X}$ het steekproefgemiddelde, n de steekproefomvang en S de steekproefstandaardafwijking.

Aantekeningen

© ThiemeMeulenhoff
© ThiemeMeulenhoff

Colofon

Auteur
N.C. Keemink

Vormgeving binnenwerk
Maura van Wermeskerken, Apeldoorn

Opmaak
Crius Group, Hulshout

Redactie
Lineke Pijnappels, Tilburg

Auteur stappenplan
T.H.J. Heutmekers

Over ThiemeMeulenhoff
ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs. Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememeulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 49167 8
Eerste druk, tweede oplage, 2022

© ThiemeMeulenhoff, Amersfoort, 2021

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of enig andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

Voor zover het maken van kopieën uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16B Auteurswet 1912 j° het Besluit van 23 augustus 1985, Stbl. 471 en artikel 17 Auteurswet 1912, dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie (PRO), Postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp (www.stichting-pro.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet) dient men zich tot de uitgever te wenden. Voor meer informatie over het gebruik van muziek, film en het maken van kopieën in het onderwijs zie www.auteursrechtenonderwijs.nl.

De uitgever heeft ernaar gestreefd de auteursrechten te regelen volgens de wettelijke bepalingen. Degenen die desondanks menen zekere rechten te kunnen doen gelden, kunnen zich alsnog tot de uitgever wenden.

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

examenbundel 〉

havo **Nederlands**
havo **Engels**
havo **Duits**
havo **Frans**
havo **Economie**
havo **Bedrijfseconomie**
havo **Maatschappijwetenschappen**
havo **Geschiedenis**
havo **Aardrijkskunde**
havo **Wiskunde A**
havo **Wiskunde B**
havo **Scheikunde**
havo **Biologie**
havo **Natuurkunde**

samengevat }

havo **Economie**
havo **Bedrijfseconomie**
havo **Maatschappijwetenschappen**
havo **Geschiedenis**
havo **Aardrijkskunde**
havo **Wiskunde A**
havo **Wiskunde B**
havo **Scheikunde**
havo **Biologie**
havo **Natuurkunde**
havo/vwo **Nederlands 3F/4F**
havo/vwo **Rekenen 3F**

Tips, tricks en informatie die jou helpen bij het slagen voor je eindexamen vind je op examenbundel.nl! Nog meer kans op slagen? Volg ons ook op social media. #geenexamenstress

examenidioom + examenbundel + samengevat + zeker slagen! = #geenexamenstress

examenidioom

havo **Engels**
havo **Duits**
havo **Frans**

zeker slagen !

voor vmbo, havo én vwo

9 789006 491678